Teorija redova (Teorija masovnog opsluživanja)

Redovi (čekanje) su deo svakodnevnog života. Svi mi čekamo u redovima da bi npr. kupili kartu za bioskop, podigli novac u banci, platili na kasi u samoposluzi, poslali paket u pošti, krenuli na vožnju u zabavnom parku itd. Drugim rečima postali smo naviknuti na značajno vreme provedeno u čekanju, ali ipak postanemo uznemireni ako smo izloženi neobično dugom čekanju.

Dakako, biti primoran na čekanje nije samo beznačajna lična neprilika. Količina vremena koju populacija jedne nacije potroši na čekanje u redovima je bitan faktor u dvema stvarima: *kvalitetu života* kao i *efikasnosti nacionalne ekonomije*. Npr. pre raspada, S.S.S.R. je bio „poznat“ po užasno dugim redovima u kojima su građani stalno morali da čekaju samo da bi nabavili osnovne potrepštine. U Americi danas, procenjeno je da građani potroše 37,000,000,000 sati godišnje čekajući u redovima. Kada bi se umesto u čekanju to vreme moglo provesti produktivno, to bi značilo približno 20 miliona čovek-godina korisnog rada svake godine.

Čak i ove zastrašujuće činjenice ne odražavaju pravu sliku uticaja koji izaziva prekomerno čekanje. Velika neefikasnost takođe se javlja zbog različitih vrsta čekanja pored onih koji se odnose na stajanje ljudi u redovima. Npr. čekanje **mašina na popravku** (servis, održavanje) rezultuje se kroz izgubljenu (ne realizovanu) proizvodnju. **Transportna sredstva** (kamioni, brodovi, avioni) koja čekaju na istovar po pravilu odlažu kasniji transport. **Avioni** koji čekaju na poletanje ili sletanje mogu da ostvarivanje zacrtanog plana putovanja. Kašnjenje u **prenosu podataka** (telekomunikacije), zbog preopterećenih veza, može dovesti do gubitka podataka kao i do gubitka aktuelnosti podataka. Čekanje u jednom delu **proizvodnog procesa** ugrožava ostvarivanje plana proizvodnje. Kašnjenje u **pružanju usluga** može da se rezultuje kroz gubitak budućeg posla.

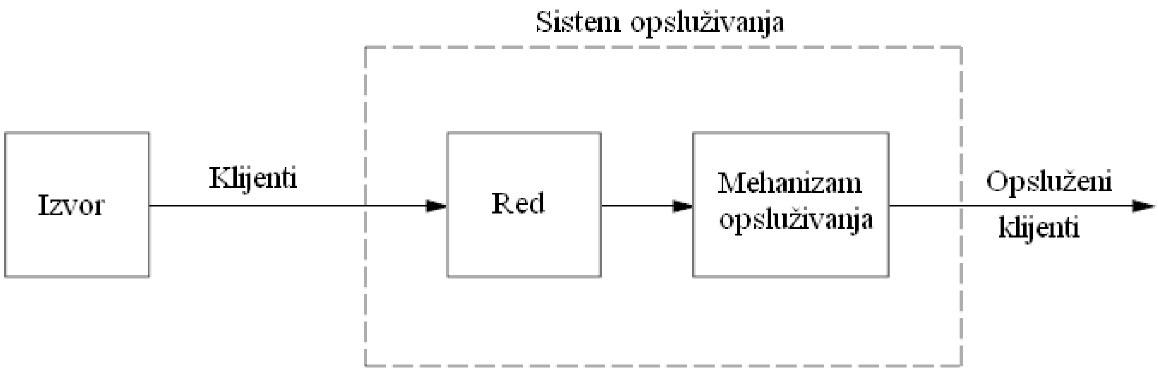
Teorija redova (masovnog opsluživanja) proučava čekanje u svim navedenim oblicima. Teorija redova koristi matematičke modele da opiše različite tipove sistema (koji sadrže neku vrstu redova) koji se javljaju u praksi. Matematičke formule pokazuju kako će se odgovarajući sistem ponašati, uključujući i prosečno čekanje koje će se javiti, pod uticajem različitih okolnosti.

Modeli teorije redova su veoma pogodni za određivanje kako da sistem masovnog opsluživanja radi na najefikasniji način. Prevelik kapacitet opsluživanja u sistemu prouzrokuje nepotrebne troškove. Sa druge strane nedovoljan kapacitet opsluživanja rezultuje se kroz prekomerno čekanje i druge neželjene posledice. Konačno, modeli teorije redova omogućuju pronalaženje odgovarajućeg balansa između *troškova opsluživanja* i *vremena čekanja*.

OSNOVNA STRUKTURA MODELA TEORIJE REDOVA

Osnovni proces opsluživanja

Osnovni proces opsluživanja, pretpostavljen u najvećem broju modela teorije redova (masovnog opsluživanja) sastoji se iz sledećeg. *Klijenti*, tj. *jedinice* koje zahtevaju opsluživanje, se generišu u vremenu iz *izvora*. Klijenti ulaze u *sistem opsluživanja* i staju u *red*. U određenim vremenskim trenucima klijenti iz reda se prihvataju na opsluživanje po nekom pravilu tj. *disciplini opsluživanja* ili *disciplini u redu*. Nakon toga se klijentu daje zahtevano opsluživanje kroz *mehanizam opsluživanja*, posle čega klijent napušta sistem opsluživanja. Ovaj proces prikazan je na slici IV-1. *1



Slika IV-1. Osnovni proces opsluživanja.

Izvor (dolazni tok klijenata - jedinica)

Osnovna karakteristika izvora klijenata (jedinica) je njegova veličina. Veličina izvora je ukupan broj klijenata koji mogu da zahtevaju opsluživanje s vremena na vreme, tj. ukupan broj određenih potencijalnih klijenata. Populacija određenih potencijalnih klijenata, koji zahtevaju opsluživanje u datom sistemu opsluživanja, naziva se *dolazna populacija*. *2

Veličina dolazne populacije može se pretpostaviti da je *konačna* ili *beskonačna* (takođe se može reći da je izvor klijenata *neograničen* ili *ograničen*). Pošto su izračunavanja daleko jednostavnija u slučaju kad je izvor neograničen, ova pretpostavka se često usvaja čak i kada je stvarna veličina izvora neki relativno veliki konačan broj. Ovu pretpostavku treba primeniti kod svakog modela teorije redova osim ako se eksplicitno ne zahteva drugačije. Slučaj ograničenog izvora ili konačne veličine dolazne populacije je analitički složeniji, jer broj klijenata koji se nalazi u sistemu opsluživanja utiče na broj potencijalnih klijenata izvan sistema u svakom trenutku. Pretpostavka da je izvor ograničen se mora uvesti ako na intenzitet kojim izvor generiše nove klijente značajno utiče broj klijenata koji se nalazi u sistemu opsluživanja.

Statistički model po kome klijenti se generišu od strane izvora u vremenu takođe mora biti definisan. Uobičajena pretpostavka je da se klijenti generišu prema tzv. *Poason-ovom procesu*, tj. broj generisanih klijenata *(x)* do nekog određenog vremenskog trenutka *(t)* ima Poasonovu raspodelu: *3

$$f(x) = P(X = x) = \frac{(\lambda \cdot t)^{x} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{x!}, \; x = 0,1,2, \ldots ,n.$$

To je slučaj kada se dolasci klijenata u sistem opsluživanja dešavaju na slučajan način ali sa konstantnim srednjim intenzitetom *(λ)*, bez obzira koliko je klijenata već u sistemu (pretpostavka beskonačne dolazne populacije). Ekvivalentna pretpostavka je da je raspodela vremena između dva uzastopna dolaska klijenata u sistem opsluživanja *eksponencijalna,* tj.: *4

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \quad t \geq 0.$$

Vreme između dva uzastopna dolaska jedinica u sistem naziva se i *vreme dolaska*. Svaka neuobičajena pretpostavka vezana za ponašanje klijenata koji dolaze u sistem takođe mora da se definiše. Jedan od primera je slučaj kada klijenti odbijaju da uđu u sistem u slučaju da je red previše dug (*balking*).

Red

Red je mesto gde klijenti čekaju na opsluživanje. Red se karakteriše maksimalnim brojem klijenata koji mogu jednovremeno da budu u njemu. Redovi mogu biti *konačni* ili *beskonačni* zavisno da li je broj klijenata koji mogu jednovremeno da budu u redu konačan ili beskonačan. Uobičajena pretpostavka kod modela teorije redova je da je red beskonačan, čak i u situacijama gde postoji (relativno velika) konačna gornja granica mogućeg broja klijenata u redu, iz razloga što se analiza sistema opsluživanja dodatno komplikuje ako je gornja granica mogućeg broja klijenata u redu velika. *5

Disciplina opsluživanja (disciplina u redu)

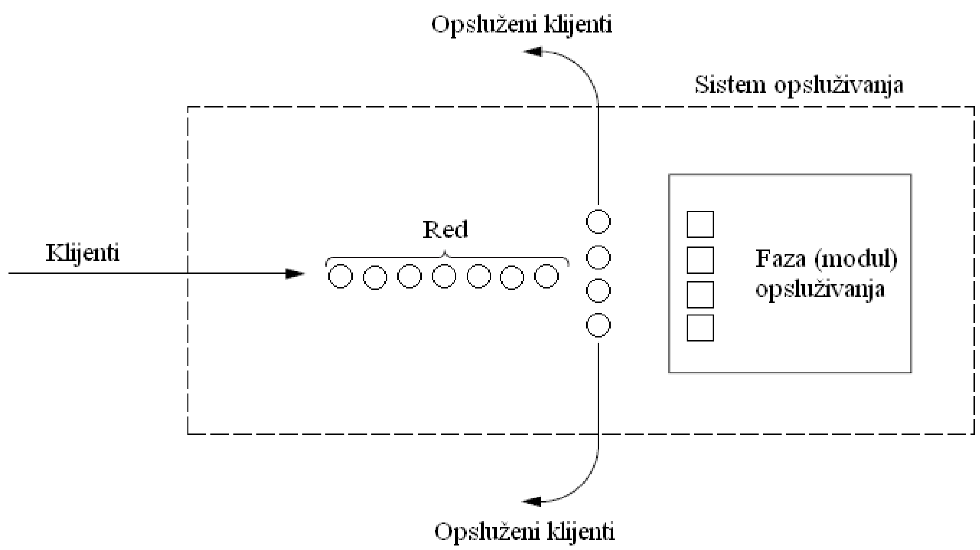
Disciplina opsluživanja se odnosi na pravilo po kojem se klijenti iz reda prihvataju na opsluživanje. Npr. *prvi-prispeli-prvi-opsluženi* (first-come-first-served **FIFO**), *poslednji-prispeli-prvi-opsluženi* (last-come-first-served **LIFO**), na slučajan način, prema nekom prioritetu ili prema nekom drugom pravilu. Pravilo *prvi-prispeli-prvi-opsluženi* se uobičajeno pretpostavlja kod modela teorije redova, osim ako se ne naglasi drugačije. *6

Mehanizam opsluživanja

Mehanizam opsluživanja se sastoji od jedne ili više *faza (modula) opsluživanja*, od kojih svaka sadrži jedan ili više *paralelnih kanala za opsluživanje*. Ako postoji više od jedne faze (modula) opsluživanja, klijent tada može da bude opsluživan kroz niz faza (kanali za opsluživanje postavljeni u red). U datoj fazi (modulu) opsluživanja, klijent pristupa jednom od paralelnih kanala za opsluživanje gde se kompletno opslužuje. Svaki model teorije redova mora da definiše međusobni raspored faza (modula) opsluživanja kao i broj kanala za opsluživanje u svakoj od faza. Elementarni modeli teorije redova podrazumevaju jednu fazu (modul) opsluživanja sa jednim ili konačnim brojem kanala za opsluživanje. Vreme koje protekne od početka pa do završetka opsluživanja klijenta naziva se *vreme opsluživanja*. U svakom modelu sistema opsluživanja mora da bude definisana raspodela vremena opsluživanja za svaki kanal za opsluživanje (po mogućstvu i za različite vrste klijenata), mada je uobičajeno da se pretpostavi ista raspodela za sve kanale za opsluživanje. Raspodela vremena opsluživanja koja se najčešće koristi u praksi je eksponencijalna raspodela. *7

Elementarni sistem opsluživanja

Kao što je rečeno, teorija redova se može primeniti na veliki broj različitih situacija u kojima se zahteva čekanje u redu radi dobijanja određene vrste usluge. Najrasprostranjenija situacija je sledeća:
Jednostruki red (koji s vremena na vreme može biti prazan) se formira ispred jedne jedine faze (modula) opsluživanja, koja se sastoji od jednog ili više kanala za opsluživanje. Svakog klijenta, generisanog od strane izvora, kompletno opslužuje jedan kanal za opsluživanje, posle nekog vremena provedenog u redu. Opisani sistem opsluživanja je prikazan na slici IV-2.

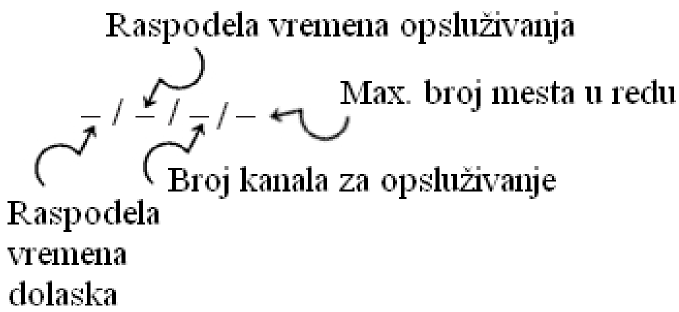


Slika IV-2. Elementarni sistem opsluživanja. *8

Kanal za opsluživanje ne mora da bude samo jedna osoba, kanal za opsluživanje može da predstavlja i grupu ljudi koja udružuje snage da istovremeno izvede zahtevano opsluživanje klijenta. Čak šta više kanali za opsluživanje ne moraju biti ljud. U velikom broju slučajeva kanali za opsluživanje su mašine, vozila, elektronski uređaji itd. Takođe klijenti u redu ne moraju biti ljudi. Npr. to mogu biti delovi koji čekaju na obradu određenom vrstom mašine, ili kola koja čekaju ispred servisne radionice.

U stvarnosti nije čak ni neophodno da se red fizički formira ispred fizičke strukture koja predstavlja odgovarajuću fazu opsluživanja. Umesto toga klijenti u redu mogu da budu rasuti po određenoj oblasti, čekajući da kanal za opsluživanje „dođe“ do njih, npr. mašine koje čekaju na popravku. Jedan radnik ili grupa radnika (kanali za opsluživanje) zaduženi za datu oblast predstavljaju fazu opsluživanja za datu oblast.

Svi opisani modeli teorije redova su elementarnog tipa, kao što je prikazano na slici IV-2. U mnogima od njih se pretpostavlja da su vremena između dolazaka klijenata u sistem nezavisna i raspodeljena po istoj teorijskoj raspodeli, kao i da su vremena opsluživanja klijenata međusobno nezavisna i raspodeljena po istoj teorijskoj raspodeli. Takvi modeli se uobičajeno označavaju kao: (Kendall – ova obeležavanja) *9



gde je M = eksponencijalna raspodela,
D = konstantno vreme,
E_k = Erlang – ova raspodela (parametar oblika = k),
G = raspodela opšteg tipa.

Terminologija i označavanje

Ukoliko se ne naglasi drugačije, koristi se sledeća standardna terminologija:

Stanje sistema	=	definiše se preko broja klijenata u sistemu opsluživanja.
Dužina reda	=	broj klijenata koji čekaju na početak opsluživanja tj.

stanje sistema minus broj klijenata koji se trenutno opslužuje.

$N_{ws}(t)$ $\{L(t)\}$= broj klijenata (jedinica) u sistemu opsluživanja u vremenskom trenutku t ($t \geq 0$).

$p_n(t)$ = verovatnoća da je tačno n klijenata (jedinica) u sistemu opsluživanja u vremenskom trenutku t.

c = broj kanala za opsluživanje (paralelni kanali za opsluživanje u pojedinim fazama opsluživanja) u sistemu opsluživanja.

λ_n = srednji intenzitet dolaska klijenata (jedinica) u sistem (očekivani broj dolazaka u jedinici vremena) ako je trenutno n klijenata u sistemu opsluživanja.

μ_n = srednji intenzitet opsluživanja sistema (očekivani broj opsluženih klijenata u jedinici vremena) ako je trenutno n klijenata (jedinica) u sistemu opsluživanja.

Ako je λ_n konstantno za sve n, tada se ta konstanta obeležava sa λ. Analogno, kada je srednji intenzitet opsluživanja μ_n, za zauzete kanale opsluživanja, konstantan za sve $n \geq 1$, tada se ta konstanta obeležava sa μ (u ovom slučaju je $\mu_n = c \cdot \mu$ za $n \geq c$, tj. kad su svih c kanala zauzeti). U skladu sa napred iznetim $1/\lambda$ i $1/\mu$ predstavljaju srednje vreme između dolaska dva uzastopna klijenta i srednje vreme opsluživanja, respektivno. Takođe, $\rho = \lambda/(c \cdot \mu)$ predstavlja **koeficijent iskorišćenja** kanala za opsluživanje tj. očekivani deo vremena koje je svaki kanal za opsluživanje, u datoj fazi (modulu) opsluživanja, zauzet. *10

Odgovarajuće standardno označavanje je potrebno i za opisivanje rezultata rada sistema opsluživanja. Neposredno po početku rada sistema opsluživanja, na stanje sistema (broj klijenata u sistemu) veoma utiče početno stanje sistema opsluživanja tj. broj klijenata u sistemu na početku rada sistema opsluživanja. Vremenom taj uticaj opada dok potpuno ne nestane. Taj period rada sistema opsluživanja naziva se period **nestacionarnog rada**. Posle dovoljno dugog perioda vremena, stanje sistema postane praktično nezavisno od početnog stanja kao i od proteklog vremena. U tom slučaju sistem opsluživanja je dostigao **stacionarni režim rada**, koji se ogleda kroz činjenicu da raspodela verovatnoća stanja sistema ne zavisi od vremena tj. verovatnoće stanja sistema imaju konstantne vrednosti. *11 Teorija redova se u najvećem broju slučajeva fokusira na analizu sistema opsluživanja u stacionarnom režimu rada, jer je slučaj nestacionarnog rada veoma komplikovan za analizu. Sledeće oznake se odnose na opisivanje rezultata rada – karakteristika sistema opsluživanja u stacionarnom režimu:

$\boldsymbol{p_n}$ = verovatnoća da je tačno n klijenata (jedinica) u sistemu opsluživanja.

N_{ws} {***L***} = srednji broj klijenata (jedinica) u sistemu = $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n$.

N_w {***L_q***} = srednji broj klijenata (jedinica) u redu = $\sum_{n=0}^{\infty} (n - c) \cdot p_n$.

t_{ws} {***W***} = srednje vreme koje klijent (jedinica) provede u sistemu opsluživanja uključujući i vreme opsluživanja.

t_w {***W_q***} = srednje vreme koje klijent (jedinica) provede u redu.

Relacije koje povezuju N_{ws}, N_w, t_{ws} i t_w

Pod pretpostavkom da je λ_n konstantno za sve n, dokazano je da u stacionarnom režimu rada sistema opsluživanja važi:

$$N_{ws} = \lambda \cdot t_{ws}.$$

Pošto je John D. C. Little[1] prvi dokazao gornju relaciju, ona se u literaturi često naziva i **Little's formula** (Little-ova formula). Isti dokaz pokazuje da važi i:

$$N_w = \lambda \cdot t_w.$$

Ako λ_n nije konstantno za sve n, tada se λ u gornjim jednačinama može zameniti sa $\overline{\lambda}$ – prosečnim intenzitetom dolaznog toka ($\overline{\lambda}$ se još označava i kao λ_{eff} – efektivni intenzitet dolaznog toka). U zavisnosti od modela sistema opsluživanja $\overline{\lambda}$ odnosno λ_{eff} se izračunava na odgovarajući način, u opštem slučaju važi:

$$\overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot p_n .$$

Dalje, pod pretpostavkom da je prosečno vreme opsluživanja – $1/\mu$ konstantano za sve $n \geq 1$, sledi da je:

$$t_{ws} = t_w + 1/\mu.$$

Prikazane relacije su od velike važnosti jer omogućuju da se svaka od četiri osnovne karakteristike sistema opsluživanja N_{ws}, N_w, t_{ws} i t_w odredi neposredno pošto se bilo koja od njih analitički odredi.

Slučajni (stohastički) procesi

Stanje nekih sistema moguće je opisati između ostalog pomoću jedne ili više veličina, u zavisnosti od odgovarajućeg parametra, a da se karakter zavisnosti

[1] J. D. C. Little, "A Proof for the Queueing Formula: $L = \lambda \cdot W$," *Operations Research,* **9**(3): 383–387, 1961;

između odgovarajućeg parametra i posmatranih veličina ne može tačno odrediti. U većini slučajeva ta zavisnost se potčinjava statističkim zakonima koji omogućuju da se odrede verovatnoće realizacija posmatranih veličina. Drugim rečima, vrednosti posmatrane veličine ili veličina nisu unapred određene, već predstavljaju slučajne (stohastičke) veličine u zavisnosti od odgovarajućeg parametra. *12

Parametar, od interesa za teoriju redova, u zavisnosti od koga se određuju slučajne veličine je vreme. U ovom slučaju skup realizacija određene slučajne veličine, može se posmatrati kao slučajna veličina koja se menja u vremenu, tj. može se smatrati da je to slučajna funkcija vremena ili slučajni proces. Slučajni proces ili slučajna funkcija je takva funkcija vremenskog argumenta, čija je vrednost, pri svakoj datoj vrednosti argumenta, jedna slučajna veličina.

Klasifikacija slučajnih (stohastičkih) procesa može se izvršiti na osnovu tri pokazatelja: *13
- prostora stanja slučajnog procesa,
- parametra slučajnog procesa, i
- statističke zavisnosti između slučajnih veličina za različite vrednosti parametra slučajnog procesa.

Prostor stanja. Skup mogućih vrednosti (stanja) koje slučajna funkcija može da uzme je prostor stanja. U slučaju da su realizacije slučajne funkcije definisane na diskretnom skupu, bilo da je on konačan ili beskonačan, tada se takav prostor stanja naziva diskretnim. Uobičajeno je da se diskretan prostor stanja poistovećuje sa *lancem*. Ukoliko su realizacije slučajne funkcije definisane na neprekidnom intervalu, konačnom ili beskonačnom, tada se takav prostor stanja naziva kontinualnim. *14

Parametar slučajnog procesa. Parametar slučajnog procesa može biti realan, kompleksan ili opšteg tipa npr. n-dimenzionalan, kao i diskretan odnosno kontinualan. Skup svih vrednosti parametra slučajnog procesa se naziva oblast definisanosti slučajnog procesa. Sa aspekta matematičke teorije parametar slučajnog procesa ne mora da ima fizičku interpretaciju, dok se u praksi slučajni procesi često primenjuju pri izučavanju procesa koji protiču u vremenu. Iz tog razloga, u teoriji redova, parametar slučajnog procesa je vreme (t), dok se fiksna vrednost parametra slučajnog procesa naziva vremenski trenutak. *15

Ako se promene vrednosti slučajne funkcije u prostoru stanja mogu odigravati samo u određenim vremenskim trenutcima na vremenskoj osi tada je taj slučajan proces, slučajan proces sa diskretnim parametrom (vremenom). Ukoliko se vrednosti slučajne funkcije u prostoru stanja mogu menjati bilo kad u okviru konačnog ili beskonačnog intervala na vremenskoj osi tada je to slučajan proces sa kontinualnim parametrom (vremenom).

Statističke zavisnosti između slučajnih veličina. Mnogi interesantni slučajni (stohastički) procesi ne mogu se u potpunosti opisati postojećim matematičkim aparatom tj. nije moguće uspostaviti statističke zavisnosti između slučajnih veličina. U teoriji postoje određeni tipovi slučajnih procesa koje karakterišu odgovarajuća statistička zavisnost između slučajnih veličina, kao i odgovarajuća uprošćenja i uvedene pretpostavke. Iz napred iznetog proizilazi da je za opsivanje stvarnog slučajnog procesa potrebno, od postojećih tipova slučajnih procesa, izabrati onaj koji ga u potpunosti ili najvernije opisuje. Od interesa za formiranje diferencijalnih jednačina stanja sistema opsluživanja su sledeći slučajni procesi:

– slučajni proces Markov-a, i
– proces "rađanja i umiranja" kao specijalni slučaj slučajnog procesa Markov-a.

Slučajni proces Markov-a

Za formiranje diferencijalnih jednačina stanja sistema opsluživanja potrebno je poznavati slučajni proces Markov-a koji je definisan na diskretnom prostoru stanja sa kontinualnim vremenom.

<u>Definicija:</u> Slučajni proces X(t) definisan na diskretnom prostoru stanja, formira slučajni proces Markov-a sa kontinualnim vremenom (lanac Markov-a sa kontinualnim vremenom) ako za sve cele brojeve *n* i bilo koji niz $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$, $(t_1 < t_2, < \ldots < t_{n+1})$ važi: *16

$$P\left[X(t_{n+1}) = j \mid X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \ldots, X(t_n) = i_n\right] = P\left[X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i_n\right] \tag{1}$$

Izraz (1) predstavlja glavnu osobinu slučajnog procesa Markov-a. U literaturi se može naći da se ta osobina naziva i "odsustvo posledica". Osobina slučajnog procesa Markov-a definisana izrazom (1) znači da je kompletan uticaj prethodnih realizacija (stanja) slučajnog procesa na buduću realizaciju (stanje) slučajnog procesa sumiran u tekućoj realizaciji (stanju) slučajnog procesa.

U slučaju lanca Markov-a sa kontinualnim vremenom prelazak (tranzicija) iz stanja u stanje može se odigrati u bilo kom vremenskom trenutku.

Slučajna promenljiva koja opisuje koliko dugo slučajni proces ostaje u tekućem diskretnom stanju pre nego što pređe u neko drugo stanje raspodeljena je, u slučaju slučajnog procesa Markov-a sa kontinualnim vremenom, po *eksponencijalnoj raspodeli*, što će biti dokazano u narednom tekstu. U tu svrhu neka τ_i bude slučajna promenljiva koja predstavlja ukupno vreme koje proces provede u stanju *i*.

Uzimajući u obzir:

- osobinu slučajnog procesa Markov-a, da je način na koji prethodna stanja procesa utiču na buduće stanje procesa, kompletno određen preko tekućeg stanja procesa, kao i
- činjenicu da nije definisano koliko dugo je proces u tekućem stanju (već samo ukupno vreme τ_i koje proces provede u stanju *i*),

dobija se da preostalo vreme koje proces provede u stanju *i* mora da ima raspodelu koja zavisi samo od stanja *i* (tekućeg stanja) a ne od toga koliko dugo je proces bio u stanju *i*.

Na osnovu gore iznetog može se napisati:

$$P\left[\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\right] = h(t) \qquad (2)$$

gde je:
s - vreme koje je proces već proveo u tekućem stanju,
t - dodatno vreme (ostatak do ukupnog vremena koje će proces provesti u tekućem stanju),
h(t) - funkcija čiji je argument dodatno vreme.

Desnu stranu izraza (2), primenjujući formulu za uslovnu verovatnoću, moguće je napisati u sledećem obliku:

$$P\left[\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\right] = \frac{P\left[\tau_i > s+t; \tau_i > s\right]}{P\left[\tau_i > s\right]} = \frac{P\left[\tau_i > s+t\right]}{P\left[\tau_i > s\right]}$$

što sledi iz činjenice da događaj τ_i>s+t sadrži događaj τ_i>s.

Zamenom gornjeg izraza u izraz (2) dobija se:

$$P\left[\tau_i > s+t\right] = P\left[\tau_i > s\right] \cdot h(t). \qquad (3)$$

Ako se vremenu *s* dodeli vrednost nula (s=0) i uzimajući u obzir da je P[τ_i>0]=1, dobija se da je:

$$P\left[\tau_i > t\right] = h(t).$$

Dodeljivanje vrednosti nula vremenu *s* moguće je zbog početnih uslova tj. nije specificirano koliko je proces već u stanju *i* što znači da vreme s može uzeti proizvoljnu vrednost.

Na osnovu gornjeg izraza i izraza (3) može se napisati:

$$P\left[\tau_i > s+t\right] = P\left[\tau_i > s\right] \cdot P\left[\tau_i > t\right] \qquad (4)$$

Diferenciranjem izraza (4) po *s* dobija se:

$$\frac{dP\left[\tau_i > t+s\right]}{ds} = \frac{dP\left[\tau_i > s\right]}{ds} \cdot P\left[\tau_i > t\right] \qquad (5)$$

gde je:

$$\frac{dP[\tau_i > s]}{ds} = \frac{d}{ds}\left(1 - P[\tau_i \le s]\right) = -f_{\tau_i}(s) \text{ gustina raspodele za } \tau_i.$$

Zamenom gornjeg izraza u izraz (5), dodeljivanjem vremenu s vrednosti nula (s=0) i sređivanjem izraza dobija se:

$$\frac{dP[\tau_i > t]}{P[\tau_i > t]} = -f_{\tau_i}(0) \cdot ds.$$

Integracijom gornjeg izraza u granicama od 0 do t dobija se:

$$\ln P[\tau_i > t] = -f_{\tau_i}(0) \cdot t \text{ ; odnosno}$$

$$P[\tau_i > t] = e^{f_{\tau_i}(0) \cdot t}$$

Diferenciranjem poslednjeg izraza po *t* i njegovim sređivanjem dolazi se do konačnog izraza za gustinu raspodele vremena koje proces provede u stanju *i*:

$$f_{\tau_i}(t) = f_{\tau_i}(0) \cdot e^{f_{\tau_i}(0) \cdot t} \qquad (6)$$

gde je:

$f_{\tau_i}(t)$ - gustina raspodele vremena koje proces provede u stanju *i*.

Izraz (6) predstavlja gustinu eksponencijalne raspodele sa parametrom $f_{\tau_i}(0)$ koji može da zavisi samo od stanja *i*, čime je dokaz završen.

Materija izneta u gornjem tekstu važi uopšte za slučajni proces Markov-a bez obzira da li je on nehomogen ili homogen (verovatnoće prelaska iz stanja u stanje zavise ili ne zavise od vremena).

Verovatnoće prelaska – promene stanja i verovatnoće stanja slučajnog proces Markov-a

Nehomogeni slučajni proces Markov-a

Kod nehomogenih slučajnih procesa, pa i kod nehomogenog slučajnog procesa Markov-a, verovatnoće prelaska iz stanja u stanje – promene stanja zavise od vremena, tj. od *položaja* na vremenskoj osi. (videti *ANNEX V*) *17

Verovatnoća prelaska, u zavisnosti od vremena, slučajnog procesa Markov-a sa kontinualnim vremenom iz stanja *i* u trenutku *s* u stanje *j* u trenutku *t* definiše se kao uslovna verovatnoća: *18

$$p_{ij}(s,t) = P[X(t) = j \mid X(s) = i] \qquad (7)$$

Verovatnoća stanja tj. verovatnoća da će se proces (sistem) naći u trenutku t u stanju j definiše se kao: *18

$$p_j(t) = [X(t)=j]; \quad j=0,1, \dots ,n. \tag{8}$$

Matrična diferencijalna jednačina koja definiše promenu verovatnoće stanja u zavisnosti od vremena, za slučaj nehomogenog slučajnog procesa Markov-a je oblika: *19

$$\frac{dp(t)}{dt} = p(t) \cdot Q(t) \tag{9}$$

gde je:

$p(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots , p_n(t)]$ – vektor verovatnoća stanja u trenutku t,

$\mathbf{Q}(t)$ – matrica intenziteta prelaska (tranzicije) u zavisnosti od vremena, nehomogeni slučaj. Matrica $\mathbf{Q}(t) = [q_{ij}(t)]$ je kvadratna i dimenzije je $n \times n$ (n – broj diskretnih stanja slučajnog procesa Markov-a).

Gde je sistem (proces) bio u početnom trenutku određuje se preko početnog vektora verovatnoća stanja p(0), potrebnog za rešavanje matrične diferencijalne jednačine (9) – početni uslovi. Ako je $p_k(0)=1$ za k=i i $p_k(0)=0$ za $k \neq i$ tada se može reći da je proces (sistem) bio u stanju i u trenutku 0. U tom slučaju $p_j(t)$ je identički jednako $p_{ij}(0,t)$.

Homogeni slučajni proces Markov-a

Za svaki slučajni proces, pa i za slučajni proces Markov-a, se kaže da je homogen ako verovatnoće prelaska slučajnog procesa, iz stanja u jednom vremenskom trenutku u neko drugo stanje u drugom vremenskom trenutku, *ne zavise* od položaja datih vremenskih trenutaka na vremenskoj osi, već zavise samo od *dužine intervala* između vremenskih trenutaka u kojima se proces nalazi na početku odnosno na kraju posmatrane promene stanja (tranzicije) (videti *ANNEX V*). *20

Na osnovu uslova homogenosti, verovatnoća prelaska iz stanja i u stanje j na vremenskom intervalu τ, kod homogenog slučajnog procesa Markov-a sa kontinualnim vremenom, definiše se kao sledeća uslovna verovatnoća: *21

$$p_{ij}(\tau) = P\left[X(t+\tau) = j \,\middle|\, X(t) = i\right] \tag{10}$$

gde je:

t – proizvoljni vremenski trenutak.

Verovatnoća stanja tj. verovatnoća da će se proces (sistem) naći u trenutku t u stanju j definiše se kao: *21

$$p_j(t) = [X(t)=j]; \quad j=0,1, \dots ,n. \tag{11}$$

Verovatnoće stanja procesa (sistema) određuju se na identičan način kao i u slučaju nehomogenog slučajnog procesa Markov-a, stim što treba uzeti u obzir da matrica **Q** (matrica intenziteta prelaska) ne zavisi od vremena, tj. iz matrične diferencijalne jednačine: *22

$$\frac{dp(t)}{dt} = p(t) \cdot Q \tag{12}$$

gde je:

$p(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots , p_n(t)]$ – vektor verovatnoća stanja u trenutku *t*,

Q – matrica intenziteta prelaska (tranzicije) koja u homogenom slučaju ne zavisi od vremena tj. članovi matrice su konstantni. Matrica **Q** = $[q_{ij}]$ je kvadratna i dimenzije je $n \times n$ (n – broj diskretnih stanja slučajnog procesa Markov-a).

Gde je sistem (proces) bio u početnom trenutku određuje se preko početnog vektora verovatnoća stanja p(0), potrebnog za rešavanje matrične diferencijalne jednačine (12) – početni uslovi. Ako je $p_k(0)=1$ za $k=i$ i $p_k(0)=0$ za $k \neq i$ tada se može reći da je proces (sistem) bio u stanju *i* u trenutku 0. U tom slučaju $p_j(\tau)$ je identički jednako $p_{ij}(\tau)$.

Za homogeni slučajni proces Markov-a kaže se da je "nesvodljiv" (irreducible) ukoliko se u svako stanje procesa može doći iz svakog drugog stanja (ne mora direktno) tj. $p_{ij}(\tau) > 0$, gde je τ vremenski interval proizvoljne dužine. *23

Homogeni slučajni proces Markov-a sa ovim svojstvima još se u literaturi naziva i "tranzitivnim".

Ako je homogeni slučajni proces Markov-a nesvodljiv tj. tranzitivan tada, nezavisno od početnih uslova, uvek postoji sledeća granična vrednost:

$$\lim_{\tau \to \infty} p_{ij}(\tau) \to p_j$$

tj. verovatnoće prelaska iz stanja u stanje (tranzicione verovatnoće) postaju jednake verovatnoćama stanja sistema kad interval u kome se posmatra proces (sistem) teži beskonačnosti tj. kad $\tau \to \infty$.

Za slučajni proces Markov-a sa kontinualnim vremenom, koji je definisan na diskretnom skupu kaže se da je *ergodičan* ako po isteku dovoljno velikog intervala vremena τ, verovatnoće stanja sistema (procesa) ne zavise od početnih uslova, početnog trenutka kao ni od dužine samog vremenskog intervala τ. *24

$$\lim_{\tau\to\infty} p_j(\tau) \to p_j \tag{13}$$

Potreban uslov da bi slučajni proces Markov-a sa kontinualnim vremenom (lanac Markov-a) bio ergodičan je to da on bude *nesvodljiv* tj. *tranzitivan,* dok je dovoljan uslov da slučajni proces Markov-a sa kontinualnim vremenom bude *homogen*.

Drugim rečima sistemi (procesi) za koje važi (13) postaju stacionarni, nezavisni od vremena tj. ulaze u stacionarni režim rada, gde su p_j verovatnoće stanja procesa (sistema) u stacionarnom režimu rada.

Vreme trajanja slučajnog procesa, odnosno rada sistema, može se uslovno podeliti na dva intervala i to: interval $(0, t_{stac})$ i interval (t_{stac}, ∞). Interval vremena $(0, t_{stac})$ naziva se interval prelaznog režima rada sistema (nestacionarni režim), dok se interval (t_{stac}, ∞) naziva intervalom stacionarnog režima rada sistema. Veličina t_{stac} je vremenski trenutak kada možemo smatrati da sistem prelazi iz nestacionarnog u stacionarni režim rada. Vremenski trenutak t_{stac} se približno može odrediti iz uslova: *25

$$\frac{|p_j(\tau) - p_j|}{p_j} \cdot 100 \le \delta; \qquad \text{za } \forall j = 0,1, \dots ,n \tag{14}$$

gde je δ izraženo u procentima (%).

Na osnovu kriterijuma (14) sistem (proces) ulazi u stacionarni režim rada (t_{stac}) kada je relativna razlika svih verovatnoća stanja manja od δ procenata (npr. 5%, 1% itd.). Ukoliko su parametri δ manji to je veličina t_{stac} veća.

Na osnovu izraza (13) dobija se:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{dp_j(\tau)}{d\tau} = 0 \qquad j = 0,1, \dots ,n$$

tj. nema promene verovatnoća stanja sistema (procesa) u vremenu pa je prvi izvod verovatnoća stanja po vremenu jednak nuli, tako da se verovatnoće stanja sistema određuju iz sistema linearnih algebarskih jednačina: *26

$$p \cdot Q = 0 \tag{15}$$

gde je:

$p = [p_0, p_1, \dots , p_n]$ – vektor verovatnoća stanja.

Sistem linearnih algebarskih jednačina (15) jednoznačno određuje verovatnoće stanja sistema (procesa) u stacionarnom režimu rada uz normirajući uslov:

$$\sum_{j=0}^{n} p_j = 1.$$

U narednom tekstu biće razmatrani samo *homogeni* slučajni procesi Markov-a.

Proces rađanja i umiranja

Proces „rađanja i umiranja" je specijalan slučaj slučajnog procesa Markov-a u kojem proces iz stanja *k* može preći samo u susedna stanja *k+1*, *k–1* ili ostati u tekućem stanju *k*. *27

Proces rađanja i umiranja je adekvatan za modeliranje promena u veličini neke populacije. Kada se kaže da je procesu stanju *k* to znači da je populacija u tom trenutku veličine *k*. Tada, promena stanja od k do *k+1* bi značila "rađanje" unutar populacije, dok promena od *k* do *k–1* bi značila "umiranje" unutar populacije.

Shodno gore iznetom, λ_k se definiše kao intenzitet rađanja tj. intenzitet sa kojim se rađanja događaju kad je populacija veličine *k*. Slično, μ_k se definiše kao intenzitet umiranja tj. intenzitet sa kojim se umiranja događaju kada je populacija veličine *k*. U ovom slučaju intenziteti rađanja i umiranja su nezavisni od vremena i zavise samo od stanja *k*, tako da ovako definisan proces rađanja i umiranja predstavlja homogeni slučajni proces Markov-a sa kontinualnim vremenom tj. homogeni lanac Markov-a sa kontinualnim vremenom tipa umiranja i rađanja.
U skladu sa gornjim tekstom i oznakama dobija se da su elemanti matrice **Q** sledeći:

$$q_{k,k+1} = \lambda_k, \text{ odnosno } q_{k,k-1} = \mu_k \tag{16}$$

i kako proces može da pređe iz stanja *k* samo u susedna stanja, tj. $q_{kj} = 0$ za $|k-j| > 1$, ili da ostane u istom stanju to je:

$$q_{k,k} = -(\lambda_k + \mu_k) \tag{17}$$

Pošto se ovde radi o teoriji redova, prikladnije je govoriti o dolasku i odlasku jedinica u sistem opsluživanja nego o rađanju i umiranju članova određene populacije. To znači da bi dolazak jedinice u sistem opsluživanja odgovarao "rađanju" unutar populacije dok bi odlazak jedinice iz sistema odgovarao "umiranju" unutar populacije. Takođe, λ_k predstavlja intenzitet sa kojim jedinice dolaze u sistem opsluživanja ako se u njemu nalazi *k* jedinica, odnosno μ_k predstavlja intenzitet sa kojim jedinice napuštaju sistem opsluživanja ako se u njemu nalazi *k* jedinica.

U slučaju homogenog lanca Markov-a sa kontinualnim vremenom i *n* diskretnih mogućih stanja tipa rađanja i umiranja, matrica intenziteta prelaska (tranzicije) je oblika:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & \mu_{n-1} & -(\lambda_{n-1}+\mu_{n-1}) & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & \mu_n & -\mu_n \end{bmatrix}_{n\times n} \quad (18)$$

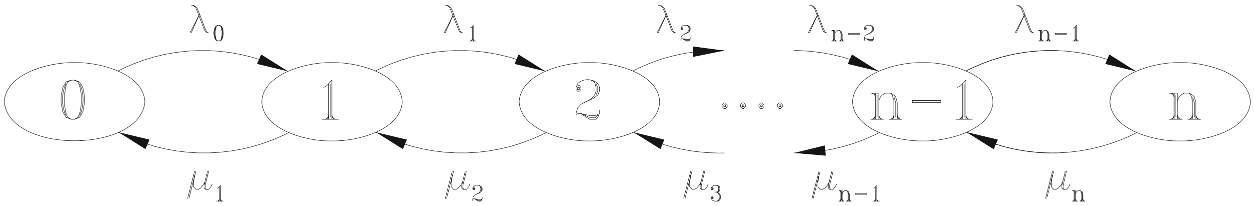
Matrica **Q** je napisana pod pretpostavkom da je maksimalan broj jedinica koje mogu u jednom trenutku mogu da budu u sistemu opsluživanja *n*.

Potrebno je naglasiti da su u homogenom lancu Markov-a tipa umiranja i rađanja procesi dolaska jedinica u sistem (rađanje) i odlaska jedinica iz sistema (umiranje) međusobno nezavisni, što sledi direktno iz osobine slučajnog procesa Markov-a. Na osnovu gore iznetog moguće je definisati verovatnoće događaja prelaska sistema (procesa) iz stanja *k* u susedna stanja: *28 (videti *ANNEX **VI***)

događaj B1: P[tačno 1 dolazak u $(t,t+\Delta t)\,|\,$k jedinica u sistemu] = $\lambda_k\cdot\Delta t + o(\Delta t)$
događaj D1: P[tačno 1 odlazak u $(t,t+\Delta t)\,|\,$k jedinica u sistemu] = $\mu_k\cdot\Delta t + o(\Delta t)$
događaj B2: P[tačno 0 dolazaka u $(t,t+\Delta t)\,|\,$k jedinica u sistemu] = $1 - \lambda_k\cdot\Delta t + o(\Delta t)$
događaj D2: P[tačno 0 odlazaka u $(t,t+\Delta t)\,|\,$k jedinica u sistemu] = $1 - \mu_k\cdot\Delta t + o(\Delta t)$

Iz verovatnoća gornjih događaja vidi se da su dolasci tj. odlasci jedinica iz sistema u grupama nemogući jer takvi događaji su reda $o(\Delta t)$.

Informacije sadržane u matrici intenziteta prelaska (tranzicije) **Q** mogu se prikazati preko dijagrama (grafa) promene stanja sistema. U takvom dijagramu stanje sistema *k* je prikazano preko pravougaonika u čijoj sredini se nalazi broj *k*. Svaki intenzitet prelaska q_{ij} (elementi matrice **Q**) koji je različit od nule je prikazan u dijagramu preko strelice od *i* do *j*, iznad koje se nalazi q_{ij}. Elementi na glavnoj dijagonali matrice **Q** ne sadrže ni jednu novu informaciju tako da dijagram ne sadrži lukove koji sistem iz stanja *i* prevode opet u stanje *i*. Izgled dijagrama promene stanja sistema prikazan je na slici IV-3. *29



Slika IV-3. Dijagram promene stanja procesa tipa "rađanja i umiranja".

Sistem diferencijalnih jednačina koji opisuje promenu stanja sistema u vremenu se dobija zamenom matrice **Q** (18) u izraz (12) i sledećeg je oblika:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 \cdot p_0(t) + \mu_1 \cdot p_1(t); \\
&\vdots \\
\frac{dp_k(t)}{dt} &= \lambda_{k-1} \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) \cdot p_k(t) + \mu_{k+1} \cdot p_{k+1}(t); \quad k = 1, \dots, n-1 \\
&\vdots \\
\frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1}(t) - \mu_n \cdot p_n(t).
\end{aligned} \tag{19}$$

Za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina (19) potrebno je definisati početne uslove oblika $p_k(0)$, $k = 0,1, \dots ,n$ koji treba da ispunjavaju uslov:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$$

Jednokanalni sistem opsluživanja sa ograničenim redom

Karakteristike jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom su sledeće: *30

- sistem ima jedan kanal za opsluživanje ($c = 1$) i konačan broj mesta u redu *m*.
- vremenski intervali između dolazaka jedinica u sistem su raspodeljeni po eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom λ tj. dolazni tok je proces rađanja odnosno Poisson-ov proces. Intenziteti dolaska jedinica u zavisnosti od stanja sistema imaju sledeće vrednosti:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & k = 0,1,\dots,m \\ 0 & k = m+1 \end{cases}$$

- vreme trajanja opsluživanja jedinica raspodeljeno je po eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom μ tj. opsluživanje jedinica predstavlja proces umiranja.
- Kendall - ova oznaka ovog sistema je $M(\lambda)/M(\mu)/1/m$ ili kraće $M/M/1/m$.
- pravilo prihvatanja iz reda na opsluživanje je "prva prispela - prva opslužena" (FIFO).

Ukoliko jedinica pri dolasku u sistem zatekne prazan sistem (nema jedinica u sistemu), tada ona biva prihvaćena u sistem i odmah počinje da se opslužuje. Dalje, ako jedinica koja dolazi u sistem zatekne u sistemu *k* jedinica $k \in [1, m]$ tada jedinica biva prihvaćena u sistem i staje u red. Dok ako jedinica zatekne u sistemu m+1 jedinicu (jedna se opslužuje a *m* ih je u redu) biva odbijena.

Kao što je ranije u tekstu rečeno procesi dolaska jedinica (Poisson-ov proces tj. proces rađanja) i proces opsluživanja jedinica (proces umiranja) su nezavisni međusobno.

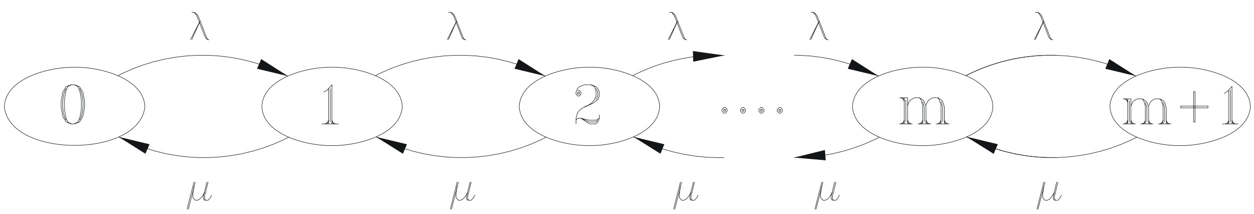
Na osnovu prethodno iznetog u ovom poglavlju i uzimajući u obzir da su intenziteti prelaska iz stanja u stanje konstantni i ne zavise od vremena a ni od stanja sistema, matrica intenziteta prelaska (tranzicije) za slučaj jednokanalnog sistema sa ograničenim redom ima sledeći oblik:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}_{m+2 \times m+2} \qquad (20)$$

Stanja sistema su: *31

- stanje 0: nema jedinica u sistemu, kanal za opsluživanje je slobodan.
- stanje 1: jedna jedinica je u sistemu i ona se opslužuje.
- stanje m+1: m+1 jedinica je u sistemu, jedna se opslužuje i m ih je u redu.

Na osnovu matrice **Q** (20) formira se dijagram promene stanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa m mesta u redu: (IV-4) *32



Slika IV-4. Dijagram promene stanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.

Zamenom matrice **Q** (20) u izraz (12) ili zamenom $\lambda_k = \lambda$ za $\forall k$ i $\mu_k = \mu$ za $\forall k$ u sistem diferencijalnih jednačina (19) dobija se sistem diferencijalnih jednačina koji opisuje stanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa *m* mesta u redu:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{i-1}(t) - (\lambda + \mu) \cdot p_i(t) + \mu \cdot p_{i+1}(t); \quad i = 1, ..., m \tag{21}$$
$$\vdots$$
$$\frac{dp_{m+1}(t)}{dt} = \lambda \cdot p_m(t) - \mu \cdot p_{m+1}(t)$$

U stacionarnom režimu rada koji podrazumeva da je: $t \to \infty$ tj. $p_i'(t) = 0$ (i=0,1,2, ... ,m+1) za homogeni slučajni proces Markov-a (λ = const., μ = const.) sistem diferencijalnih jednačina (21) prelazi u sistem algebarskih jednačina.

$$0 = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1;$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$0 = -(\lambda + \mu) \cdot p_i + \lambda \cdot p_{i-1} + \mu \cdot p_{i+1}; \qquad \text{za } i=1,2, ... ,m \tag{22}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$0 = -\mu \cdot p_{m+1} + \lambda \cdot p_m;$$

Prvi korak u rešavanju sistema algebarskih jednačina (22) je da se u zavisnosti od verovatnoće nultog stanja (p_0) izraze sve ostale verovatnoće stanja sistema na način kao što je to prikazano izrazima (23).

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0;$$
$$p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot p_0; \tag{23}$$
$$. \quad . \quad .$$
$$p_{m+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} \cdot p_0;$$

Parametar ρ koji predstavlja iskorišćenje kanala za opsluživanje (kod jednokanalnih sistema predstavlja i iskorišćenje sistema) u ovom slučaju ima oblik:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{24}$$

Normirajući uslov (zbir svih verovatnoća stanja sistema mora biti jednak jedinici) u slučaju jednokanalnog sistema opsluživanja ima oblik:

$$\sum_{i=0}^{m+1} p_i = 1; \tag{25}$$

Zamenom izraza (23) u normirajući uslov (25) i uzimajući u obzir (24) dobija se:

$$p_0 + \rho \cdot p_0 + \rho^2 \cdot p_0 + ... + \rho^{m+1} \cdot p_0 = 1, \text{ odnosno:}$$
$$p_0 \cdot (1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^{m+1}) = 1; \qquad (26)$$

odakle se dobija izraz za verovatnoću nultog stanja sistema kao:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}{}^{2}; \qquad (27)$$

Zamenom (27) u (23) dobija se izraz za ostale verovatnoće stanja sistema:

$$p_i = \rho^i \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}; \qquad (28)$$

U slučaju opšteg modela jednokanalnog sistema opsluživanja zakon raspodele verovatnoća stanja (broja jedinica u sistemu) je funkcija tri parametra (λ, μ, m), a zamenom parametara λ i μ parametrom ρ (24), dobija se da je zakon raspodele verovatnoća stanja jednokanalnog sistema opsluživanja funkcija dva parametra ρ i m. *33

$$P(X = i) = P_{\rho,m,i} = \rho^i \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \text{ i=0,1,2, ... ,(m+1)} \qquad (29)$$

U narednom tekstu biće navedene neke od osnovnih karakteristika jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom i to: *34

– Verovatnoća opsluživanja ($\mathbf{P_{ops}}$),
– Verovatnoća zauzetosti kanala za opsluživanje ($\mathbf{P_{zk}}$) (srednji broj zauzetih kanala $\mathbf{c_z}$),
– Verovatnoća postojanja reda ($\mathbf{P_{pr}}$),
– Srednji broj jedinica u redu ($\mathbf{N_w}$),
– Srednji broj jedinica u sistemu ($\mathbf{N_{ws}}$),
– Zakon raspodele vremena koje jedinica provede u sistemu,
– Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu ($\mathbf{t_{ws}}$),
– Zakon raspodele vremena koje jedinica provede u redu, i
– Srednje vreme koje jedinica provede u redu ($\mathbf{t_w}$).

Verovatnoća opsluživanja (P_{ops})

Verovatnoća opsluživanja predstavlja verovatnoću da će jedinica koja zahteva opsluživanje biti prihvaćena u sistem (biti opslužena) tj. neće dobiti otkaz. Da bi se

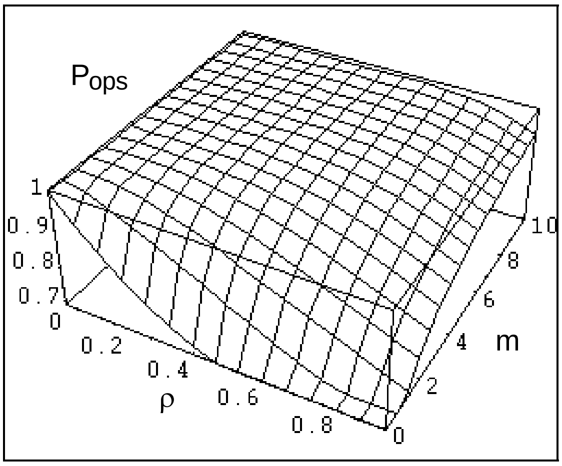
---

[2] $1+\rho+\rho^2+...+\rho^{m+1} = \frac{1-\rho^{m+2}}{1-\rho}$; suma prvih (m+2) članova geometrijskog reda.

jedinica prihvatila u sistem potrebno je da je makar jedno mesto u redu bude slobodno. Verovatnoća opsluživanja je jednaka:

$$P_{ops} = \sum_{i=0}^{m} p_i = 1 - p_{m+1} = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}; \qquad (30)$$

Na slici IV-5. prikazana je promena verovatnoće opsluživanja (P_{ops}) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ) i broja mesta u redu (m).



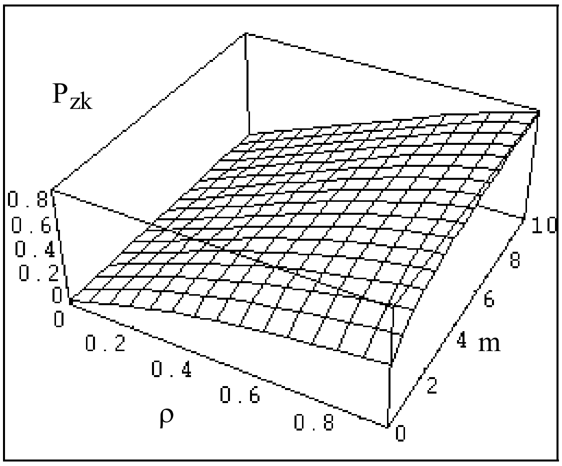
Slika IV-5. Verovatnoća opsluživanja.

Verovatnoća zauzetosti kanala za opsluživanje (P_{zk})

Verovatnoća zauzetosti kanala za opsluživanje predstavlja verovatnoću da kanal za opsluživanje radi. Kanal za opsluživanje nije zauzet jedino u slučaju da je sistem prazan tj. kada se nalazi u stanju X=0. Ova karakteristika jednokanalnog sistema opsluživanja predstavlja za jednokanalni sistem opsluživanja i srednji broj zauzetih kanala (c_z).Verovatnoća zauzetosti kanala za opsluživanje se definiše kao:

$$P_{zk} = 1 - p_0 = \frac{\rho \cdot \left(1-\rho^{m+1}\right)}{1-\rho^{m+2}}; \qquad (31)$$

Na slici IV-6. prikazana je promena verovatnoće zauzetosti kanala za opsluživanje (P_{zk}) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ) i broja mesta u redu (m).



Slika IV-6. Verovatnoća zauzetosti kanala za opsluživanje.

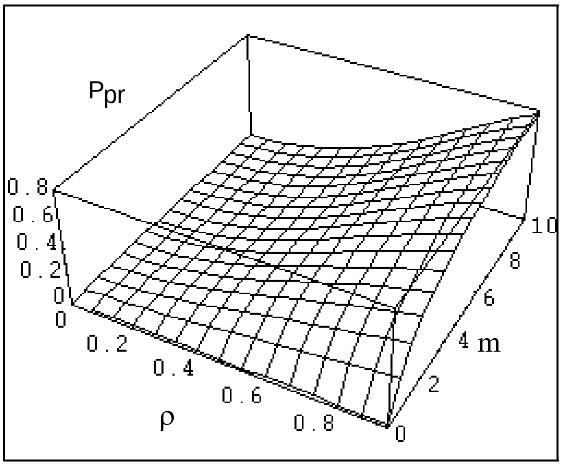
Verovatnoća postojanja reda (P_{pr})

Verovatnoća postojanja reda predstavlja verovatnoću da u sistemu postoje jedinice koje čekaju u redu na opsluživanje. Takvo stanje nastaje kada se u sistemu nalaze dve ili više jedinica tj. kada se sistem nalazi u stanjima X=2, X=3, ..., X=m+1. Verovatnoća postojanja reda je jednaka:

$$P_{pr} = p_2 + p_3 + ... + p_{m+1} = 1 - p_0 - p_1 \text{, odnosno:}$$

$$P_{pr} = \frac{\rho^2 \cdot \left(1-\rho^m\right)}{1-\rho^{m+2}}; \qquad (32)$$

Na slici IV-7. prikazana je promena verovatnoće postojanja reda (P_{pr}) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ) i broja mesta u redu (m).



Slika IV-7. Verovatnoća postojanja reda.

Srednji broj jedinica u redu (N_W)

Srednji broj jedinica u redu predstavlja očekivanu popunjenost reda. Da bi se odredio srednji broj jedinica u redu potrebno je definisati slučajnu promenljivu "broj jedinica u redu" (X_W) i njen zakon raspodele verovatnoća. Zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X_W je sledeći:

$$X_W : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m \\ p_0^r & p_1^r & p_2^r & \dots & p_m^r \\ p_0 + p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{m+1} \end{pmatrix} \tag{33}$$

gde su:
p_i (i=0,1, ...,m+1) – verovatnoće stanja jednokanalnog sistema opsluživanja,
p_i^r (i=0,1, ...,m) – verovatnoća da u redu ima 0,1,2, ...,m jedinica, i
0,1,2, ...,m – realizacije slučajne promenljive X_W.

Srednji broj jedinica u redu dobija se kao matematičko očekivanje slučajne promenljive X_W.

$$N_W = \sum_{i=0}^{m} i \cdot p_i^r = 0 \cdot (p_0 + p_1) + 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \dots + m \cdot p_{m+1}, \text{ odnosno}$$

$$N_W = \rho^2 \cdot p_0 \cdot (1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 + \dots + m \cdot \rho^{m-1}); \tag{34}$$

jer je $p_i = \rho^i \cdot p_0$.

Izraz u zagradi može se napisati na sledeći način:

$$1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 + \dots + m \cdot \rho^{m-1} = \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1 - \rho) + 1]}{(1 - \rho)^2};[3] \tag{35}$$

Zamenom izraza za p_0 (27) i izraza (35) u jednačinu (34) dobija se da je:

$$N_W = \rho^2 \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1 - \rho) + 1]}{(1 - \rho) \cdot (1 - \rho^{m+2})}; \tag{36}$$

Na slici IV-8. prikazana je promena srednjeg broja jedinica u redu (N_W) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ) i broja mesta u redu (m).

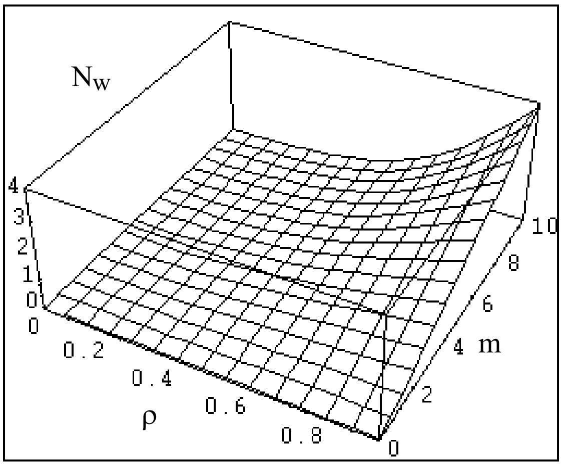
---

[3] Polazeći od sume geometrijskog reda oblika:

$$1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^m = \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho},$$

diferenciranjem leve i desne strane po ρ dobija se:

$$1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 + \dots + m \cdot \rho^{m-1} = \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1 - \rho) + 1]}{(1 - \rho)^2}.$$



Slika IV-8. Srednji broj jedinica u redu.

Srednji broj jedinica u sistemu (N_{ws})

Srednji broj jedinica u sistemu predstavlja očekivanu popunjenost sistema. Srednji broj jedinica u sistemu dobija se kao matematičko očekivanje, slučajne promenljive čiji je zakon raspodele definisan izrazom (29) odnosno, zakona raspodele verovatnoća stanja jednokanalnog sistema opsluživanja.

$$N_{ws} = \sum_{i=0}^{m+1} i \cdot p_i = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + \ldots + (m+1) \cdot p_{m+1}, \text{ odnosno}$$

$$N_{ws} = p_0 \cdot \rho \cdot (1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 + \ldots + (m+1) \cdot \rho^m). \tag{37}$$

jer je $p_i = \rho^i \cdot p_0$.

Izraz u zagradi može se napisati na sledeći način:

$$1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 + \ldots + (m+1) \cdot \rho^m = \frac{1 - \rho^{m+1} \cdot [m \cdot (1-\rho) + 2 - \rho]}{(1-\rho)^2};\text{[4]} \tag{38}$$

Zamenom izraza za p_0 (27) i izraza (38) u jednačinu (37) dobija se da je:

$$N_{ws} = \rho \cdot \frac{1 - \rho^{m+1} \cdot [m \cdot (1-\rho) + 2 - \rho]}{(1-\rho) \cdot (1 - \rho^{m+2})}; \tag{39}$$

[4] Polazeći od sume geometrijskog reda oblika:

$$1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{m+1} = \frac{1 - \rho^{m+2}}{1 - \rho}$$

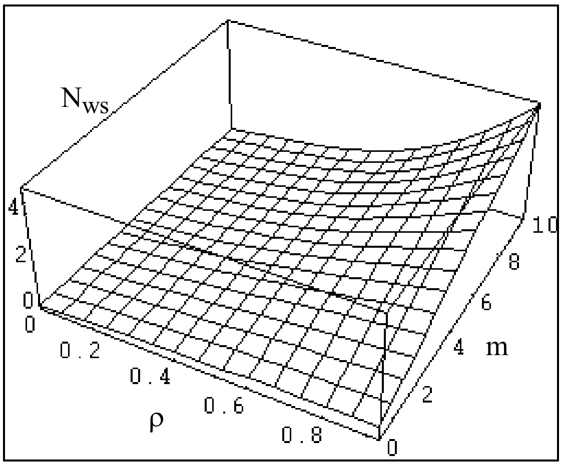
diferenciranjem leve i desne strane po ρ dobija se:

$$1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 + \ldots + (m+1) \cdot \rho^m = \frac{1 - \rho^{m+1} \cdot [m \cdot (1-\rho) + 2 - \rho]}{(1-\rho)^2}.$$

Izraz (39) takođe se može dobiti sabiranjem izraza srednji broj zauzetih kanala (31) i izraza za srednji broj jedinica u redu (36) tj. kao:

$$N_{ws} = c_z(P_{zk}) + N_w \, .$$

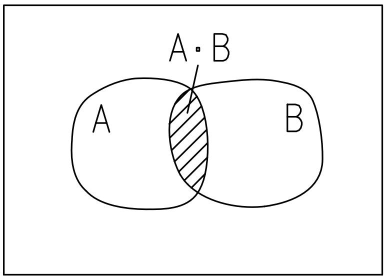
Na slici IV-9. prikazana je promena srednjeg broja jedinica u sistemu N_{ws} u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ) i broja mesta u redu (m).



Slika IV-9. Srednji broj jedinica u sistemu.

Zakon raspodele vremena koje jedinica provede u redu

Da bi se odredio zakon raspodele vremena koje jedinica provede u redu potrebno je prvo odrediti verovatnoću da je vreme koje jedinica provede u redu (T_r) manje od nekog zadatog (t). U tu svrhu potrebno je definisati dva događaja: (slika IV-10)



Slika IV-10. Presek događaja A i B.

– događaj A: u redu ima *k* jedinica ($X=x_k$, $0 \le k \le m-1$; $m=1,2,3, ...$) i
– događaj B: vreme koje jedinica provede u redu je manje od zadatog ($T_r<t$).

Presek događaja A i B predstavlja verovatnoću da će jedinica koja pristupa u sistem u redu boraviti manje od zadatog vremena. Verovatnoća tog složenog događaja se može napisati kao:

$$P_k(T_r<t)=P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B/A) \qquad (40)$$

gde je:
P(A) – verovatnoća događaja A, tj. da u redu ima *k* jedinica,
P(B/A) – verovatnoća događaja B pod uslovom da se ostvario događaj A, tj. da je data jedinica boravila u redu manje vreme od zadatog ako je u trenutku njenog dolaska u sistem u redu bilo *k* jedinica.

Iz napred iznetog sledi:

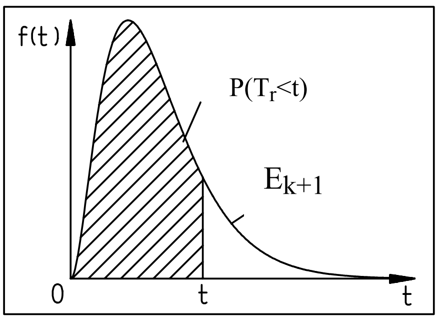
$$P(T_r < t) = \sum_{k=0}^{m-1} P(X = k) \cdot P(T_r < t / X = k) \tag{41}$$

odnosno:

$$P(T_r < t) = \sum_{k=0}^{m-1} \rho^{k+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \cdot \int_0^t \frac{\mu \cdot (\mu \cdot t)^k \cdot e^{-\mu \cdot t}}{k!} \cdot dt . \tag{42}$$

Izraz: $P(X = k) = \rho^k \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$, predstavlja verovatnoću da se u redu nalazi *k* jedinica u trenutku pristupanja posmatrane jedinice u sistem (u datom trenutku u redu može biti najviše *m-1* jedinica tj. mora postojati barem jedno mesto u redu prazno).

Izraz: $\int_0^t \frac{\mu \cdot (\mu \cdot t)^k \cdot e^{-\mu \cdot t}}{k!} \cdot dt$ predstavlja verovatnoću da će jedinica koja pristupa u sistem čekati u redu opsluživanje jedinice koja se trenutno opslužuje i opsluživanje *k* jedinica ispred sebe, što znači da je vreme koje jedinica provodi u redu jednako zbiru *k+1* slučajnih promenljivih od kojih svaka ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom μ. Takva slučajna promenljiva ima Erlangovu raspodelu reda *k+1* (slika IV-11).



Slika IV-11. Raspodela vremena koje jedinica provede u redu.

Primenom elementarnih transformacija izraz (42) može da se napiše u obliku:

$$P(T_r < t) = \int_0^t \frac{\rho \cdot (\mu - \lambda)}{1-\rho^{m+2}} \cdot e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot dt ; \tag{43}$$

gde podintegralna funkcija predstavlja gustinu raspodele vremena koje jedinica provede u redu tj.:

$$f(t) = \frac{\rho \cdot (\mu - \lambda)}{1 - \rho^{m+2}} \cdot e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}; \qquad (44)$$

Integracijom izraza (2.55) dobija se:

$$P(T_r < t) = \frac{\rho \cdot (1 - \rho)}{1 - \rho^{m+2}} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \rho^k - e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{m-k-1} \rho^i \right\}; \qquad (45)$$

Sumiranjem geometrijskih nizova ρ^k (k=0,1, ... ,m-1) i ρ^i (i=0,1, ... ,m-k-1) dobija se:

$$P(T_r < t) = \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho^{m+2}} - \rho \cdot \frac{e^{-\mu \cdot t}}{1 - \rho^{m+2}} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot (1 - \rho^{m-k}) \qquad (46)$$

Posle sređivanja izraza (46) dobija se konačni izraz za verovatnoću da vreme koje jedinica provede u redu bude manje od zadatog (t), odnosno raspodela vremena boravka jedinica u redu:

$$P(T_r < t) = F(t) = \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho^{m+2}} - \rho \cdot \frac{e^{-\mu \cdot t}}{1 - \rho^{m+2}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} - \rho^m \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\mu \cdot t)^k}{k!} \right] \quad (47)$$

Potpun događaj u ovom slučaju je oblika:

$$P(T_r<t) + P(T_r \geq t) + P(T_r=0) = 1;$$

gde je: $P(T_r=0) = p_0$.

Srednje vreme koje jedinica provede u redu (t_w)

Srednje vreme koje jedinica provede u redu predstavlja očekivano vreme koje će data jedinica provesti u redu. Srednje vreme koje jedinica provede u redu predstavlja matematičko očekivanje kontinualne slučajne promenljive čija je funkcija raspodele data izrazom (47) odnosno, dobija se integracijom gustine raspodele vremena koje jedinica provede u redu (44) tj.:

$$t_w = \int_0^{\infty} t \cdot \frac{\rho \cdot (\mu - \lambda)}{1 - \rho^{m+2}} \cdot e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot dt; \qquad (48)$$

Jednostavniji i brži način za određivanje srednjeg vremena koje jedinica provede u redu je primenom “Little” - ove formule, tj. deljenjem izraza (36), koji predstavlja srednji broj jedinica u redu (N_W), sa prosečnim intenzitetom dolaznog toka jedinica u sistem ($\overline{\lambda}$):

$$t_W = \frac{N_W}{\overline{\lambda}}. \tag{49}$$

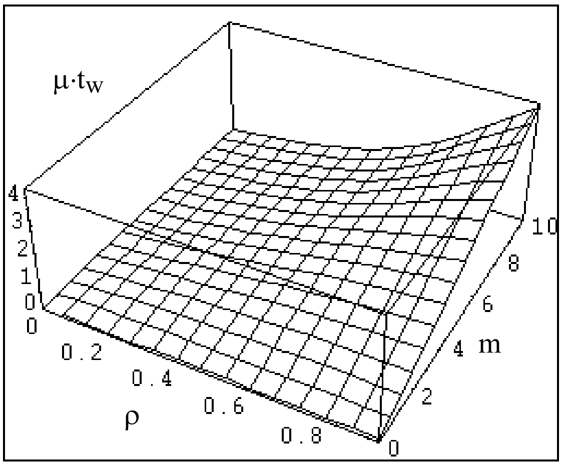
U ovom slučaju prosečni intenzitet dolaznog toka se izračunava kao:

$$\overline{\lambda} = \sum_{k=0}^{m+1} \lambda_k \cdot p_k = \lambda \cdot (p_0 + p_1 + ... + p_m) + 0 \cdot p_{m+1} \tag{50}$$

odnosno:

$$\overline{\lambda} = \lambda \cdot (1 - p_{m+1}). \tag{51}$$

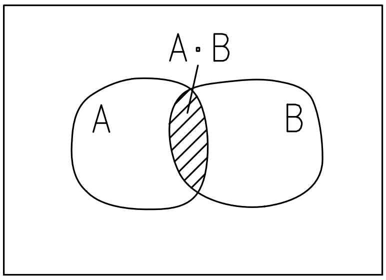
Na slici IV-12. prikazana je promena srednjeg vremena koje jedinica provede u redu (t_W), (odnosno veličine $\mu \cdot t_W$) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ) i broja mesta u redu (m).



Slika IV-12. Srednje vreme koje jedinica provede u redu.

Zakon raspodele vremena koje jedinica provede u sistemu

Da bi se odredio zakon raspodele vremena koje jedinica provede u sistemu potrebno je prvo odrediti verovatnoću da je vreme koje jedinica provede u sistemu (T_S) manje od nekog zadatog (t). U tu svrhu potrebno je definisati dva događaja: (slika IV-13.)



Slika IV-13. Presek događaja A i B.

– događaj A: u sistemu ima k jedinica ($X=x_k$, $0 \leq k \leq m$; m=0,1,2,3, ...) i
– događaj B: vreme koje jedinica provede u sistemu je manje od zadatog ($T_s<t$).

Presek događaja A i B predstavlja verovatnoću da će jedinica koja pristupa u sistem u njemu boraviti manje od zadatog vremena. Verovatnoća tog složenog događaja se može napisati kao:

$$P_k(T_s<t)=P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B/A) \tag{52}$$

gde je:
P(A) – verovatnoća događaja A, tj. da u sistemu ima *k* jedinica,
P(B/A) – verovatnoća događaja B pod uslovom da se ostvario događaj A, tj. da je data jedinica boravila u sistemu manje vreme od zadatog ako je u trenutku njenog dolaska u sistem u njemu bilo *k* jedinica.

Iz napred iznetog sledi:

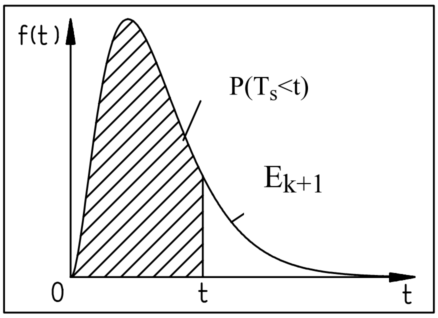
$$P(t_{ws} < t) = \sum_{k=0}^{m} P(X = x_k) \cdot P(t_{ws} < t \;/ X = x_k), \tag{53}$$

odnosno:

$$P(t_{ws} < t) = \sum_{k=0}^{m} \rho^k \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \cdot \int_0^t \frac{\mu \cdot (\mu \cdot t)^k \cdot e^{-\mu \cdot t}}{k!} \cdot dt \,. \tag{54}$$

Izraz: $P(X = k) = \rho^k \cdot \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$, predstavlja verovatnoću da se u sistemu nalazi *k* jedinica u trenutku pristupanja posmatrane jedinice u sistem (u datom trenutku u sistemu može biti najviše *m* jedinica tj. mora postojati barem jedno mesto u redu prazno).

Izraz: $\int_0^t \dfrac{\mu \cdot (\mu \cdot t)^k \cdot e^{-\mu \cdot t}}{k!} \cdot dt$ predstavlja verovatnoću da će jedinica koja pristupa u sistem čekati opsluživanje *k* jedinica ispred sebe, a zatim će ostati u sistemu i ono vreme za koje se i ona opslužuje, što znači da je vreme koje jedinica provodi u sistemu jednako zbiru *k+1* slučajnih promenljivih od kojih svaka ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom μ. Takva slučajna promenljiva ima Erlangovu raspodelu reda *k+1*. (slika IV-14).



Slika IV-14. Raspodela vremena koje jedinica provede u sistemu.

Primenom elementarnih transformacija izraz (54) može da se napiše u obliku:

$$P(T_s < t) = \int_0^t \frac{\mu-\lambda}{1-\rho^{m+2}} \cdot e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot dt\,; \qquad (55)$$

gde podintegralna funkcija predstavlja gustinu raspodele vremena koje jedinica provede u sistemu tj.:

$$f(t) = \frac{\mu-\lambda}{1-\rho^{m+2}} \cdot e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}\,; \qquad (56)$$

Integracijom izraza (55) dobija se:

$$P(T_s < t) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{m} \rho^k - e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{m-k} \rho^i \right\}; \qquad (57)$$

Sumiranjem geometrijskih nizova ρ^k (k=0,1, ... ,m) i ρ^i (i=0,1, ... ,m-k) dobija se:

$$P(T_s < t) = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}} - \frac{e^{-\mu \cdot t}}{1-\rho^{m+2}} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot (1-\rho^{m-k+1})\,; \qquad (58)$$

Posle sređivanja izraza (58) dobija se konačni izraz za verovatnoću da vreme koje jedinica provede u sistemu bude manje od zadatog (t), odnosno raspodela vremena boravka jedinica u sistemu:

$$P(T_s < t) = F(t) = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}} - \frac{e^{-\mu \cdot t}}{1-\rho^{m+2}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} - \rho^{m+1} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(\mu \cdot t)^k}{k!} \right] \qquad (59)$$

Prvi član sa desne strane u izrazu (59) predstavlja izraz za verovatnoću opsluživanja P_{ops} (vidi izraz 30). Odavde sledi da je verovatnoća da jedinica provede u sistemu neko zadato vreme manja od verovatnoće opsluživanja, jer verovatnoća opsluživanja podrazumeva da će data jedinica biti opslužena ukoliko je prihvaćena u sistem nezavisno od vremena koje će ona provesti u sistemu.

Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu (t_{ws})

Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu predstavlja očekivano vreme koje će data jedinica provesti u sistemu. Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu predstavlja matematičko očekivanje kontinualne slučajne promenljive čija je funkcija raspodele data izrazom (59) odnosno, dobija se integracijom gustine raspodele vremena koje jedinica provede u sistemu (56):

$$t_{ws} = \int_0^\infty t \cdot \frac{(\mu - \lambda)}{1 - \rho^{m+2}} \cdot e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot dt\,; \qquad (60)$$

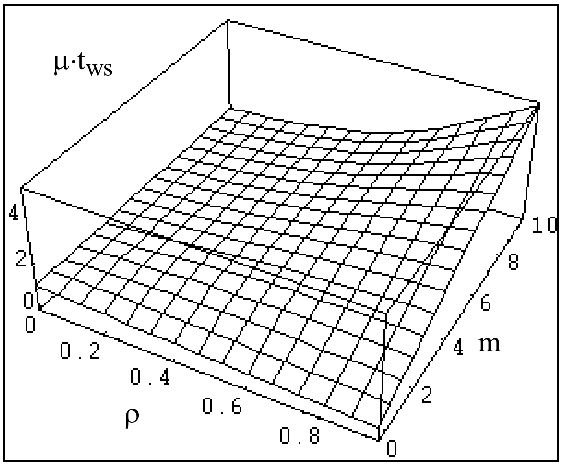
Jednostavniji i brži način za određivanje srednjeg vremena koje jedinica provede u redu je primenom "Little" - ove formule, tj. deljenjem izraza (39), koji predstavlja srednji broj jedinica u sistemu (N_{ws}), sa prosečnim intenzitetom dolaznog toka jedinica u sistem ($\overline{\lambda}$):

$$t_{ws} = \frac{N_{ws}}{\overline{\lambda}}. \qquad (61)$$

U ovom slučaju, kao i u slučaju srednjeg vremena koje jedinica provede u redu, prosečni intenzitet dolaznog toka određuje se na osnovu izraza (51) tj.:

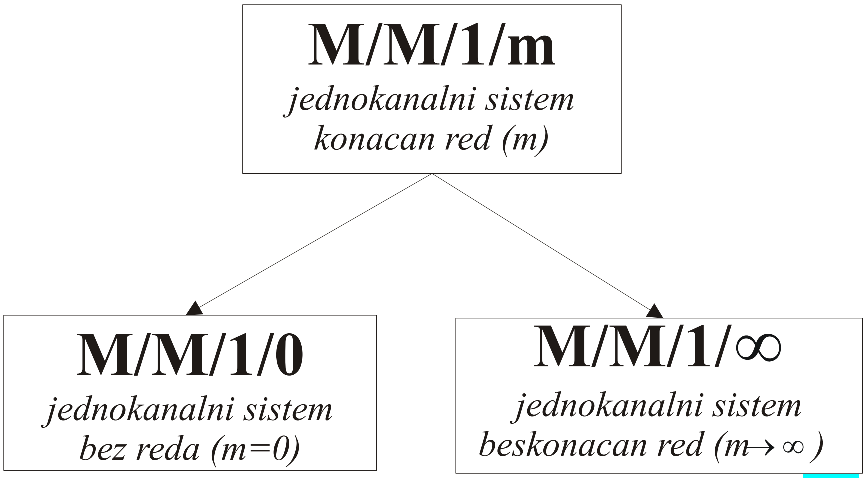
$$\overline{\lambda} = \lambda \cdot (1 - p_{m+1}).$$

Na slici IV-15. prikazana je promena srednjeg vremena koje jedinica provede u sistemu (t_{ws}), (odnosno veličine $\mu \cdot t_{ws}$) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ) i broja mesta u redu (m).



Slika IV-15. Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu.

U narednom tekstu biće prikazane karakteristike jednokanalnog sistema opsluživanja bez reda i jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom. Osnovna ideja je da se odgovarajuće vrednosti, za broj mesta u redu (m=0 ili m→∞), zamene u izraze za verovatnoće stanja i osnovne karakteristike jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom da bi se dobile karakteristike jednokanalnog sistema opsluživanja bez reda i karakteristike jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom (slika IV-16).



Slika IV-16. Relacije između jednokanalnih sistema. *35

Jednokanalni sistem opsluživanja bez reda

Model jednokanalnog sistema opsluživanja bez reda obeležava se po Kendall - ovoj oznaci sa M/M/1/0.

Karakteristike ovog modela sistema su:
– sistem ima jedan kanal za opsluživanje,
– sistem nema red (sistem sa otkazima),
– dolazni tok jedinica je prost sa intenzitetom λ, intenziteti dolaska jedinica u zavisnosti od stanja sistema imaju sledeće vredosti:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & k = 0 \\ 0 & k = 1 \end{cases},$$

– jedinica se opslužuju sa intenzitetom μ.

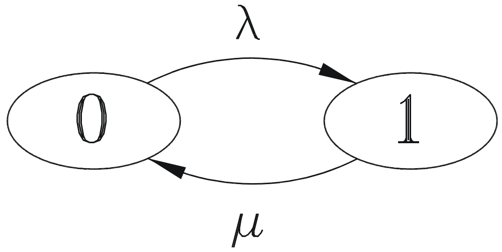
Razlikuju se samo dva stanja sistema sa stanovišta statusa jedinice koja zahteva opsluživanje i to:
– u trenutku dolaska jedinice na opsluživanje u sistemu ima 0 jedinica, tada se jedinica prihvata u sistem i direktno ide na opsluživanje.
– u trenutku dolaska jedinice na opsluživanje u sistemu je jedna jedinica koja se opslužuje, tada jedinica koja dolazi dobija otkaz.

Moguća stanja sistema su:
- stanje 0: u sistemu nema jedinica, kanal za opsluživanje je slobodan,
- stanje 1: jedna jedinica je u sistemu i ona se opslužuje.

U skladu sa prethodnim tekstom i činjenicom da su intenzitet dolaska jedinica i intenzitet opsluživanja jedinica konstantni, tj. ne zavise ni od stanja sistema ni od vremena, matrica intenziteta prelaska (tranzicije) **Q**, za jednokanalni sistem bez reda, je oblika:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix}_{2\times 2} \tag{64}$$

Na osnovu matrice **Q** (64) formira se dijagram promene stanja jednokanalnog sistema opsluživanja bez reda: (slika IV-17.)



Slika IV-17. Dijagram promene stanja sistema M/M/1/0.

Na osnovu dijagrama stanja (slika IV-17.) postavlja se sistem diferencijalnih jednačina promene verovatnoća stanja sistema u vremenu. ($p_i = P(X=i)$, i=0,1)

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t)$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda \cdot p_0(t) - \mu \cdot p_1(t) \tag{65}$$

U stacionarnom režimu rada koji podrazumeva da je: $t \to \infty$ tj. $p_i'(t) = 0$ (i=0,1) za homogenu slučaj Markov-a (λ = const., μ = const.) sistem diferencijalnih jednačina (65) prelazi u sistem algebarskih jednačina.

$$0 = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1;$$
$$0 = \lambda \cdot p_0 - \mu \cdot p_1; \; ; \tag{66}$$

Rešavanjem sistema algebarskih jednačina (66) uz normirajući uslov (suma verovatnoća stanja sistema je jednaka jedinici: $p_0+p_1=1$), ili zamenom parametara: m=0, i=0,1; u izraz za zakon raspodele jednokanalnog sistema opsluživanja (29), dobija se zakon raspodele verovatnoća stanja jednokanalnog sistema opsluživanja bez reda:

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho}; \;\; p_1 = \frac{\rho}{1+\rho};$$

ili

$$P(X=i) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{1-i} \cdot \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{i}; i = 0{,}1 \qquad (67)$$

što predstavlja *Bernulijev* zakon raspodele verovatnoća.

Osnovne karakteristike jednokanalnog sistema opsluživanja bez reda, prikazane u narednom tekstu, određene su zamenom odgovarajućih parametara u izraze za karakteristike jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.

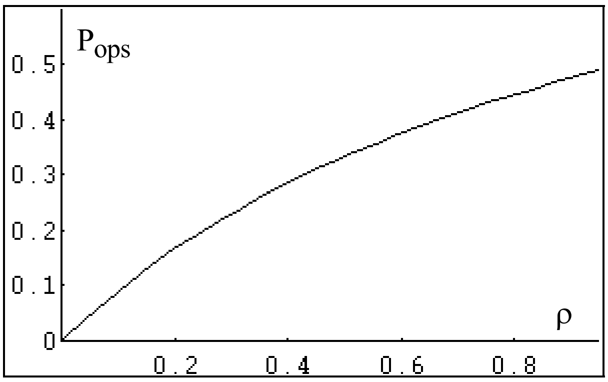
Verovatnoća opsluživanja (P_{ops})

Zamenom vrednosti nula za parametar *m* (m=0) u izraz (30), dobija se izraz za verovarnoću opsluživanja jednokanalnog sistema opsluživanja bez reda:

$$P_{ops} = \frac{1}{1+\rho}; \qquad (68)$$

što predstavlja izraz za verovatnoću p_0.

Na slici IV-18. prikazana je promena verovatnoće opsluživanja (P_{ops}) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ).



Slika IV-18. Verovatnoća opsluživanja.

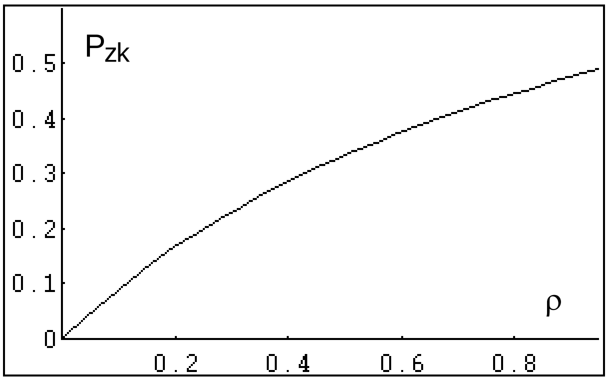
Verovatnoća zauzetosti kanala za opsluživanje (P_{zk})

Zamenom vrednosti nula za parametar *m* (m=0) u izraz (31), dobija se izraz za verovarnoću zauzetosti kanala za opsluživanje jednokanalnog sistema opsluživanja bez reda:

$$P_{zk} = \frac{\rho}{1+\rho};\qquad (69)$$

što predstavlja izraz za verovatnoću p_1.

Na slici IV-19. prikazana je promena verovatnoće zauzetosti kanala za opsluživanje (P_{zk}) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ).



Slika IV-19. Verovatnoća zauzetosti kanala za opsluživanje.

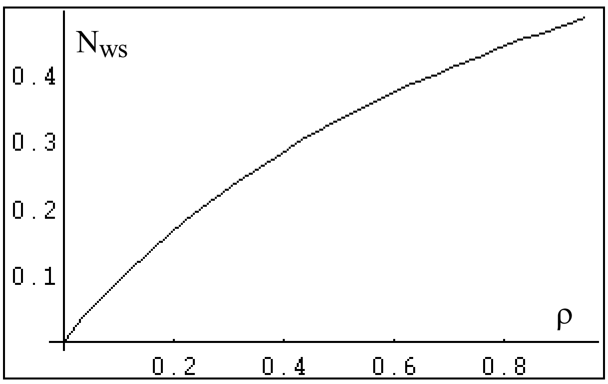
Srednji broj jedinica u sistemu (N_{ws})

Zamenom vrednosti nula za parametar *m* (m=0) u izraz (39), dobija se izraz za srednji broj jedinica u sistemu jednokanalnog sistema opsluživanja bez reda:

$$N_{ws} = \frac{\rho}{1+\rho};\qquad (70)$$

što takođe predstavlja izraz za verovatnoću p_1.

Na slici IV-20. prikazana je promena srednjeg broja jedinica u sistemu (N_{ws}) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ).



Slika IV-20. Srednji broja jedinica u sistemu.

Zakon raspodele vremena koje jedinica provede u sistemu

Zamenom vrednosti nula za parametar *m* (m=0) u izraz (59), dobija se izraz za zakon raspodele vremena koje jedinica provede u jednokanalnom sistemu opsluživanja bez reda:

$$P(T_s < t) = F(t) = \frac{1}{1+\rho} - \frac{e^{-\mu \cdot t}}{1+\rho}; \tag{71}$$

dok se gustina raspodele vremena koje jedinica provede u jednokanalnom sistemu bez reda dobija zamenom vrednosti nula za parametar *m* (m=0) u izraz (56):

$$f(t) = \frac{1}{1+\rho} \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot t}; \tag{72}$$

Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu (t_{WS})

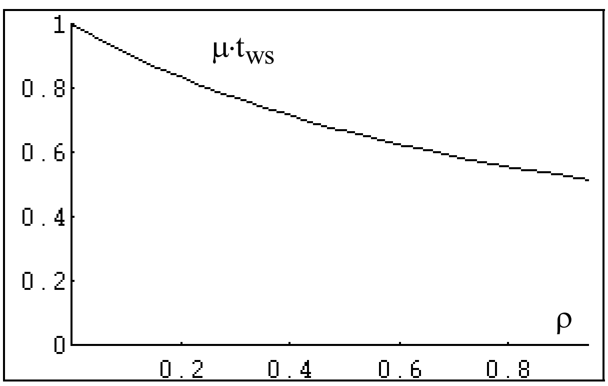
Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu predstavlja dobija se deljenjem izraza (70), koji predstavlja srednji broj jedinica u sistemu (N_{WS}), sa prosečnim intenzitetom dolaznog toka jedinica u sistem ($\overline{\lambda}$):

$$t_{WS} = \frac{1}{\overline{\lambda}} \cdot N_{WS} = \frac{1}{\overline{\lambda}} \cdot \frac{\rho}{1+\rho} = \frac{1+\rho}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1+\rho} = \frac{1}{\mu}; \tag{73}$$

gde je:

$$\overline{\lambda} = \lambda \cdot p_0 + 0 \cdot p_1 = \lambda \cdot \frac{1}{1+\rho}.$$

Na slici IV-21. prikazana je promena vremena koje jedinica provede u sistemu (t_{WS}), (odnosno veličine $\mu \cdot t_{WS}$) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ).



Slika IV-21. Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu.

Jednokanalni sistema opsluživanja sa beskonačnim redom

Model jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom obeležava se po Kendall - ovoj oznaci sa M/M/1/∞.

Karakteristike ovog modela sistema su:
- sistem ima jedan kanal za opsluživanje ($c = 1$) i beskonačan broj mesta u redu $m \to \infty$.
- vremenski intervali između dolazaka jedinica u sistem su raspodeljeni po eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom λ tj. dolazni tok je proces rađanja odnosno Poisson-ov proces. Intenziteti dolaska jedinica u zavisnosti od stanja sistema imaju sledeće vrednosti:
  $\lambda_k = \lambda$ za $k=0,1,2, ..., \infty$.
- vreme trajanja opsluživanja jedinica raspodeljeno je po eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom μ tj. opsluživanje jedinica predstavlja proces umiranja.
- jedinice se iz reda na opsluživanje prihvataju po pravilu "prva prispela - prva opslužena" (FIFO disciplina).

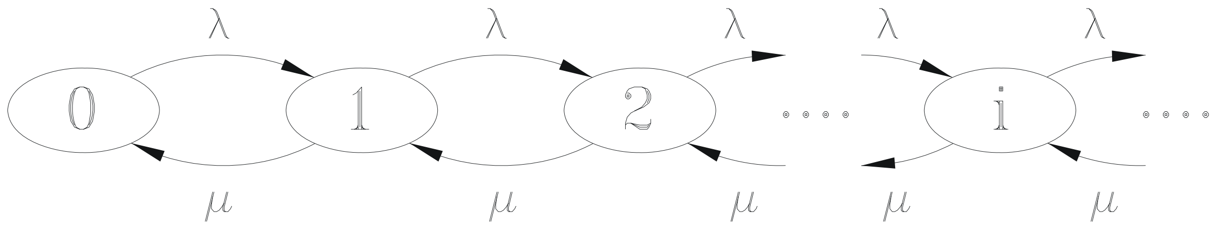
Razlikuju se dve grupe stanja sistema sa stanovišta statusa jedinice koja zahteva opsluživanje i to:
- u trenutku dolaska jedinice na opsluživanje u sistemu ima 0 jedinica, jedinica se tada prihvata u sistem i direktno ide na opsluživanje.
- u trenutku dolaska jedinice na opsluživanje u sistemu ima jedna ili više jedinica ($i=1,2,...,\infty$), jedinica se tada prihvata u sistem, staje u red i čeka na opsluživanje.

Sistem se može naći u nekom od sledećih stanja:
- stanje 0: u sistemu nema jedinica, kanal za opsluživanje je slobodan i u redu nema jedinica,
- stanje 1: u sistemu se nalazi jedna jedinica i ona se opslužuje, dok u redu nema jedinica,
- stanje i: ($i=2,3, ... ,\infty$) u sistemu se nalazi i jedinica od kojih se jedna jedinica opslužuje a ostale jedinice se nalaze u redu i čekaju na opsluživanje.

U skladu sa prethodnim tekstom i činjenicom da su intenzitet dolaska jedinica i intenzitet opsluživanja jedinica konstantni, tj. ne zavise ni od stanja sistema ni od vremena, matrica intenziteta prelaska (tranzicije) **Q**, za jednokanalni sistem sa beskonačnim redom, je oblika:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & . \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & . \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & . \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \qquad (74)$$

Na osnovu matrice **Q** (74) formira se dijagram promene stanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom: (slika IV-22.)



Slika IV-22. Dijagram promene stanja sistema M/M/1/∞.

Na osnovu dijagrama stanja (slika IV-22.) postavlja se sistem diferencijalnih jednačina promene verovatnoća stanja sistema u vremenu. ($p_i = P(X=i)$, i=1,2, ... ,∞)

$$\begin{aligned} &\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t); \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{i-1}(t) - (\lambda+\mu) \cdot p_i(t) + \mu \cdot p_{i+1}(t); \quad \text{za i=1,2, ... ,}\infty \end{aligned} \qquad (75)$$

U stacionarnom režimu rada koji podrazumeva da je: $t \to \infty$ tj. $p_i'(t) = 0$ (i=0,1,2, ... ,∞) za homogenu slučaj Markov-a (λ = const., μ = const.) sistem diferencijalnih jednačina (75) prelazi u sistem algebarskih jednačina.

$$\begin{aligned} &0 = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1; \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &0 = \lambda \cdot p_{i-1} - (\lambda+\mu) \cdot p_i + \mu \cdot p_{i+1}; \quad \text{za i=1,2, ... ,}\infty \end{aligned} \qquad (76)$$

Rešavanjem sistema algebarskih jednačina (76) uz normirajući uslov (suma verovatnoća stanja sistema je jednaka jedinici: $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$), ili nalaženjem limesa zakona raspodele jednokanalnog sistema opsluživanja (29) kad $m \to \infty$, pod uslovom da je $\rho<1$ (jer se samo pod tim uslovom može sumirati geometrijski red, odnosno limes ima konačnu vrednost), dobija se zakon raspodele verovatnoća stanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom:

$$P(X = i) = \rho^i \cdot (1-\rho);\ i = 0,1,2,...,\infty \qquad (77)$$

što predstavlja *Geometrijsku* raspodelu verovatnoća.

Osnovne karakteristike jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom, prikazane u narednom tekstu, određene su nalaženjem limesa odgovarajućih izraza za karakteristike jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom kada $m \to \infty$.

Verovatnoća opsluživanja (P_{ops})

Nalaženjem vrednosti limesa izraza (30) kada $m \to \infty$, dobija se vrednost za verovatnoću opsluživanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom:

$$P_{ops} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}\right) \Rightarrow$$

$$P_{ops} = 1; \qquad (78)$$

što znači da će svaka jedinica koja pristupi u sistem biti prihvaćena u sistem i opslužena.

Verovatnoća zauzetosti kanala za opsluživanje (P_{zk})

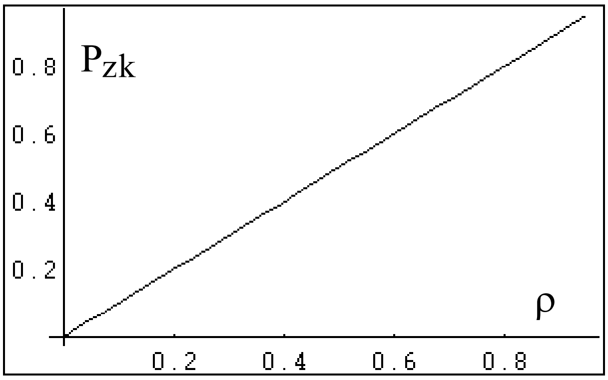
Nalaženjem vrednosti limesa izraza (31) kada $m \to \infty$, dobija se izraz za verovatnoću zauzetosti kanala za opsluživanje jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom:

$$P_{zk} = \lim_{m\to\infty}\left(\rho \cdot \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}\right) \Rightarrow$$

$$P_{zk} = \rho; \qquad (79)$$

što predstavlja opterećenje kanala a u ovom slučaju i sistema.

Na slici IV-23. prikazana je promena verovatnoće zauzetosti kanala za opsluživanje (P_{zk}) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ).



Slika IV-23. Verovatnoća zauzetosti kanala za opsluživanje.

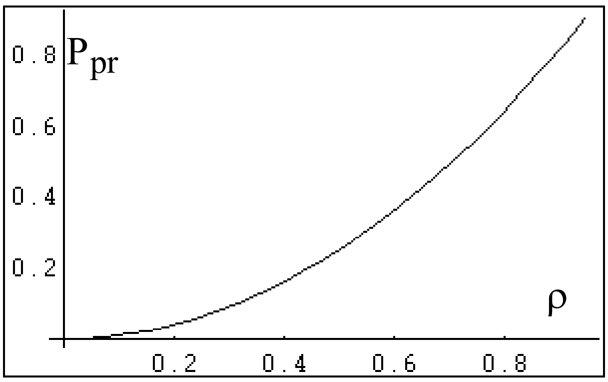
Verovatnoća postojanja reda (P_{pr})

Nalaženjem vrednosti limesa izraza (32) kada $m \to \infty$, dobija se izraz za verovatnoću postojanja reda jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom:

$$P_{pr} = \lim_{m \to \infty} \left(\rho^2 \cdot \frac{1-\rho^m}{1-\rho^{m+2}} \right) \Rightarrow$$

$$P_{pr} = \rho^2; \qquad (80)$$

Na slici IV-24. prikazana je promena verovatnoće postojanja reda (P_{pr}) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ).



Slika IV-24. Verovatnoća postojanja reda.

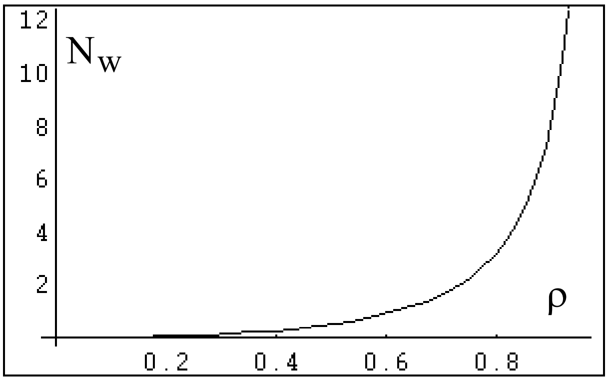
Srednji broj jedinica u redu (N_w)

Nalaženjem vrednosti limesa izraza (36) kada $m \to \infty$, dobija se izraz za srednji broj jedinica u redu jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom:

$$N_W = \lim_{m\to\infty}\left(\rho^2 \cdot \frac{1-\rho^m \cdot [m\cdot(1-\rho)+1]}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{m+2})}\right) \Rightarrow$$

$$N_W = \frac{\rho^2}{1-\rho}; \qquad (81)$$

Na slici IV-25. prikazana je promena srednjeg broja jedinica u redu (N_W) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ).



Slika IV-25. Srednji broj jedinica u redu.

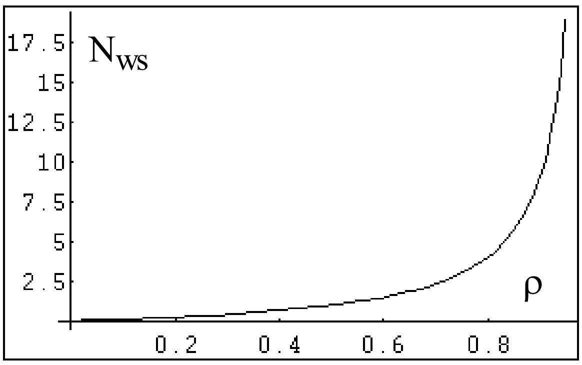
Srednji broj jedinica u sistemu (N_{WS})

Nalaženjem vrednosti limesa izraza (39) kada $m\to\infty$, dobija se izraz za srednji broj jedinica u sistemu jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom:

$$N_{WS} = \rho \cdot \frac{1-\rho^{m+1} \cdot [m\cdot(1-\rho)+2-\rho]}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{m+2})}$$

$$N_{WS} = \frac{\rho}{1-\rho}; \qquad (82)$$

Na slici IV-26. prikazana je promena srednjeg broja jedinica u sistemu (N_{WS}) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ).



Slika IV-26. Srednji broj jedinica u sistemu.

Zakon raspodele vremena koje jedinica provede u redu

Nalaženjem vrednosti limesa izraza (47) kada m→∞, dobija se zakon raspodele vremena koje jedinica provede u redu jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom:

$$P(T_r < t) = F(t) = \rho \cdot \frac{1-\rho^m}{1-\rho^{m+2}} - \rho \cdot \frac{e^{-\mu \cdot t}}{1-\rho^{m+2}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} - \rho^m \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\mu \cdot t)^k}{k!} \right]$$

$$P(T_r < t) = F(t) = \rho \cdot [1 - e^{-(\mu-\lambda)\cdot t}]; \qquad (83)$$

dok se gustina raspodele vremena koje jedinica provede u redu jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom dobija nalaženjem vrednosti limesa izraza (44) kada m→∞:

$$f(t) = \lim_{m\to\infty} \left(\rho \cdot \frac{\mu-\lambda}{1-\rho^{m+2}} \cdot e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \right) \Rightarrow$$

$$f(t) = \rho \cdot (\mu - \lambda) \cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot t}; \qquad (84)$$

gde je:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \to e^{\lambda} .$$

Srednje vreme koje jedinica provede u redu (t_w)

Srednje vreme koje jedinica provede u redu dobija se promenom Little-ove formule tako što se izraz (81) za srednji broj jedinica u redu podeli sa λ, tj.:

$$t_w = \frac{N_w}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu \cdot (\mu - \lambda)}; \qquad (85)$$

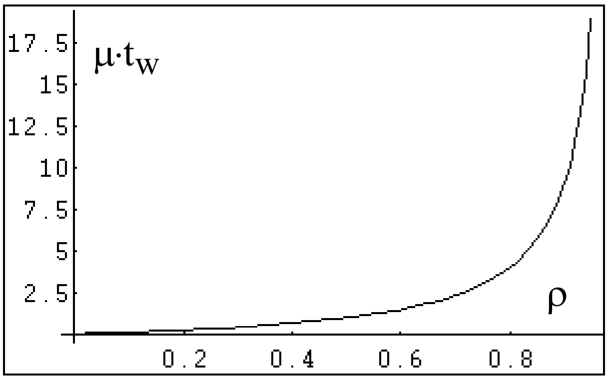
U slučaju sistema opsluživanja sa beskonačnim redom prosečni intenzitet dolaznog toka $\overline{\lambda}$ ima vrednost λ, odnosno:

$$\overline{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot p_k = \lambda \cdot (p_0 + p_1 + ... + p_\infty) = \lambda ,$$

jer je:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 .$$

Na slici IV-27. prikazana je promena srednjeg vremena koje jedinica provede u redu (t_W) (odnosno veličine $\mu \cdot t_W$) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ).



Slika IV-27. Srednje vreme koje jedinica provede u redu.

Zakon raspodele vremena koje jedinica provede u sistemu

Nalaženjem vrednosti limesa izraza (59) kada $m \to \infty$, dobija se zakon raspodele vremena koje jedinica provede u jednokanalnom sistemu opsluživanja sa beskonačnim redom:

$$P(T_S < t) = F(t) = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}} - \frac{e^{-\mu \cdot t}}{1-\rho^{m+2}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} - \rho^{m+1} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(\mu \cdot t)^k}{k!} \right] \right) \Rightarrow$$

$$P(T_S < t) = F(t) = 1 - e^{-(\mu - \lambda) \cdot t}; \qquad (86)$$

dok se gustina raspodele vremena koje jedinica provede u jednokanalnom sistemu sa beskonačnim redom dobija nalaženjem vrednosti limesa izraza (56) kada $m \to \infty$:

$$f(t) = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{\mu - \lambda}{1-\rho^{m+2}} \cdot e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \right) \Rightarrow$$

$$f(t) = (\mu - \lambda) \cdot e^{-(\mu - \lambda) \cdot t}; \qquad (87)$$

gde je:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \to e^{\lambda}.$$

Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu (t_{WS})

Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu dobija se promenom Little-ove formule tako što se izraz (82) za srednji broj jedinica u sistemu podeli sa λ, tj.:

$$t_{ws} = \frac{N_{ws}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}; \qquad (88)$$

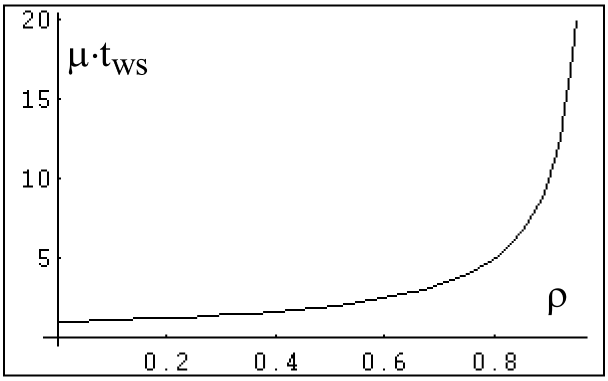
U slučaju sistema opsluživanja sa beskonačnim redom prosečni intenzitet dolaznog toka $\overline{\lambda}$ ima vrednost λ, odnosno:

$$\overline{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot p_k = \lambda \cdot (p_0 + p_1 + ... + p_\infty) = \lambda,$$

jer je:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Na slici IV-28. prikazana je promena srednjeg vremena koje jedinica provede u sistemu (t_{WS}) (odnosno veličine $\mu \cdot t_{WS}$) u zavisnosti od iskorišćenja kanala tj. sistema (ρ).



Slika IV-28. Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu.

Višekanalni sistem opsluživanja sa ograničenim redom

Model višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom obeležava se po Kendall - ovoj oznaci sa M/M/c/m.

Karakteristike ovog modela sistema su: *36

– sistem ima *c* kanala za opsluživanje i *m* mesta u redu,

– vremenski intervali između dolazaka jedinica u sistem su raspodeljeni po eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom λ tj. dolazni tok je proces rađanja odnosno Poisson-ov proces. Intenziteti dolaska jedinica u zavisnosti od stanja sistema imaju sledeće vrednosti:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & k = 0,1,\ldots,c+m-1 \\ 0 & k = c+m \end{cases}$$

– vreme trajanja opsluživanja jedinica raspodeljeno je po eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom μ. Svaki kanal opslužuje jedinice sa istim intenzitetom. Intenzitet opsluživanja sistema u zavisnosti od stanja sistema imaju sledeće vrednosti:

$$\mu_k = \begin{cases} k \cdot \mu & 0 \le k \le c \\ c \cdot \mu & k \ge c \end{cases}$$

– jedinice se iz reda na opsluživanje prihvataju po pravilu “prva prispela - prva opslužena” (FIFO disciplina).

Razlikuju se tri grupe stanja sistema sa stanovišta statusa jedinice koja zahteva opsluživanje i to: *37

– u trenutku dolaska jedinice na opsluživanje u sistemu ima od 0 do (c-1) jedinica, jedinica se tada prihvata u sistem i direktno ide na opsluživanje.

– u trenutku dolaska jedinice na opsluživanje u sistemu ima od *c* do (c+m-1) jedinica, jedinica se tada prihvata u sistem, staje u red i čeka na opsluživanje.

– u trenutku dolaska jedinice na opsluživanje u sistemu ima (c+m) jedinica (sistem je pun), tada se jedinica ne prihvata u sistem već biva odbijena.

Sistem se može naći u nekom od sledećih stanja:

– stanje 0: u sistemu nema jedinica, svi kanali su slobodni i u redu nema jedinica,

– stanje k (k=1,2, ... ,c): u sistemu se nalazi *k* jedinica i sve se opslužuju, u redu nema jedinica,

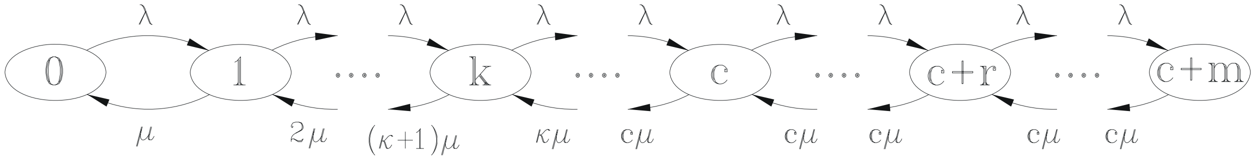
– stanje c+r (r=1,2, ... ,m): u sistemu se nalazi (c+r) jedinica od kojih se *c* jedinica opslužuje a *r* jedinica se nalazi u redu i čeka na opsluživanje.

U skladu sa prethodnim tekstom i činjenicom da su intenzitet dolaska jedinica i intenzitet opsluživanja jedinica konstantni, tj. ne zavise ni od stanja sistema ni od vremena, matrica intenziteta prelaska (tranzicije) **Q**, za višekanalni sistem sa ograničenim redom, je oblika:

$$Q=\begin{bmatrix}
-\lambda & \lambda & . & 0 & . & 0 & . & 0 & 0\\
\mu & -[\lambda+\mu] & . & 0 & . & 0 & . & 0 & 0\\
0 & 2\cdot\mu & . & 0 & . & 0 & . & 0 & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & .\\
0 & 0 & . & \lambda & . & 0 & . & 0 & 0\\
0 & 0 & . & -[\lambda+k\cdot\mu] & . & 0 & . & 0 & 0\\
0 & 0 & . & (k+1)\cdot\mu & . & 0 & . & 0 & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & .\\
0 & 0 & . & 0 & . & \lambda & . & 0 & 0\\
0 & 0 & . & 0 & . & -[\lambda+c\cdot\mu] & . & 0 & 0\\
0 & 0 & . & 0 & . & c\cdot\mu & . & 0 & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & .\\
0 & 0 & . & 0 & . & 0 & . & \lambda & 0\\
0 & 0 & . & 0 & . & 0 & . & -[\lambda+c\cdot\mu] & \lambda\\
0 & 0 & . & 0 & . & 0 & . & c\cdot\mu & -c\cdot\mu
\end{bmatrix}_{(c+m+1)\times(c+m+1)}$$

(89)

Na osnovu matrice **Q** (89) formira se dijagram promene stanja višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom: *38 (slika IV-29.)



Slika IV-29. Dijagram promene stanja sistema M/M/c/m.

Na osnovu dijagrama stanja (slika IV-29) postavlja se sistem diferencijalnih jednačina promene verovatnoća stanja sistema u vremenu. ($p_i = P(X=i)$, $i=1,2,\ldots,c+m$)

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda\cdot p_0(t)+\mu\cdot p_1(t);$$

. . . .

$$\frac{dp_k(t)}{dt}=\lambda\cdot p_{k-1}(t)-\left[\lambda+k\cdot\mu\right]\cdot p_k(t)+(k+1)\cdot\mu\cdot p_{k+1}(t); \quad \text{za } k=1,2,\ldots,(c-1)$$

. . . .

$$\frac{dp_{c+r}(t)}{dt}=\lambda\cdot p_{c+r-1}(t)-\left[\lambda+c\cdot\mu\right]\cdot p_{c+r}(t)+c\cdot\mu\cdot p_{c+r+1}(t); \text{ za } r=0,1,2,\ldots,(m-1)$$

. . . .

$$\frac{dp_{c+m}}{dt}(t) = \lambda \cdot p_{c+m-1}(t) - c \cdot \mu \cdot p_{c+m}(t); \qquad (90)$$

U stacionarnom režimu rada koji podrazumeva da je: $t \to \infty$ tj. $p_i'(t) = 0$ (i=1,2, ... , c+m) za homogenu slučaj Markov-a (λ = const., μ = const.) sistem diferencijalnih jednačina (90) prelazi u sistem algebarskih jednačina.

$$0 = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1;$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$0 = \lambda \cdot p_{k-1} - [\lambda + k \cdot \mu] \cdot p_k + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1}; \qquad \text{za } k=1,2, \ldots ,(c-1)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$0 = \lambda \cdot p_{c+r-1} - [\lambda + c \cdot \mu] \cdot p_{c+r} + c \cdot \mu \cdot p_{c+r+1}; \qquad \text{za } r=0,1,2, \ldots ,(m-1)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$0 = \lambda \cdot p_{c+m-1} - c \cdot \mu \cdot p_{c+m}; \qquad (91)$$

Za rešavanje sistema (91) potrebno je da zbir svih verovatnoća stanja bude jednak jedinici (normirajući uslov):

$$\sum_{k=0}^{c} p_k + \sum_{r=1}^{m} p_{c+r} = 1; \qquad (92)$$

Prvi korak u analitičkom rešavanju sistema (91) je da se preko verovatnoće stanja p_0 izraze sve ostale verovatnoće stanja:

$$p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot p_0; \qquad k=1,2, ..., c$$

$$p_{c+r} = \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu}\right)^r \cdot p_c = \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu}\right)^r \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \cdot \frac{1}{c!} \cdot p_0; \qquad r=1,2, ..., m. \qquad (93)$$

Parametar ρ predstavlja iskorišćenje kanala za opsluživanje i definiše se kao:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \qquad (94)$$

Zamenom izraza (93) u izraz (92) i primenjujući (94) dobija se:

$$p_0 + (c \cdot \rho) \cdot p_0 + \frac{(c \cdot \rho)^2}{2!} \cdot p_0 + \ldots + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot p_0 + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot (\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m) \cdot p_0 = 1,$$

tj.:

$$p_0 \cdot \left(\sum_{k=0}^{c} \frac{(c\cdot\rho)^k}{k!} + \frac{(c\cdot\rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^m}{1-\rho} \right) = 1;^5 \qquad (95)$$

odakle se izraz za verovatnoću stanja sistema p_0 dobija kao:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{(c\cdot\rho)^k}{k!} + \frac{(c\cdot\rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^m}{1-\rho}}; \qquad (96)$$

Zamenom izraza (96) u izraze (93) ostale verovatnoće stanja sistema se dobijaju kao: *39

$$P(X=i) = P_{c,m,\rho,i} = \begin{cases} \frac{(c\cdot\rho)^i}{i!} \cdot p_0;\ \text{za } i = 0,1,2,\dots,c \\ \frac{\rho^{i-c} \cdot (c\cdot\rho)^c}{c!} \cdot p_0;\ \text{za } i = c+1, c+2,\dots,c+m \end{cases} \qquad (97)$$

Izraz (97) predstavlja zakon raspodele verovatnoća stanja višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom. Zakon raspodele verovatnoća stanja je u osnovi funkcija četiri parametra: broja kanala (c), broja mesta u redu (m), intenziteta dolaznog toka (λ) i intenziteta opsluživanja (μ). Zamenom parametara λ, μ i c parametrom ρ dobija se da je zakon raspodele verovatnoća stanja, višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom, funkcija tri parametra i to: c, m i ρ.

Osnovne karakteristike višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom: *40

- Verovatnoća opsluživanja (**P_{ops}**),
- Srednji broj zauzetih kanala (**c_z**),
- Verovatnoća postojanja reda (**P_{pr}**),
- Srednji broj jedinica u redu (**N_w**),
- Srednji broj jedinica u sistemu (**N_{ws}**),
- Raspodela vremena koje jedinica provede u redu,
- Srednje vreme koje jedinica provede u redu (**t_w**),
- Raspodela vremena koje jedinica provede u sistemu, i
- Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu (**t_{ws}**).

[5] $1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{m-1} = \frac{1-\rho^m}{1-\rho}$; suma prvih *m* članova geometrijskog niza.

Verovatnoća opsluživanja (P_{ops})

Verovatnoća opsluživanja predstavlja verovatnoću da će jedinica koja zahteva opsluživanje biti prihvaćena u sistem (i biti opslužena) tj. neće biti odbijena. Jedinica će biti prihvaćena u sistem ako ima makar jedno mesto u redu prazno. Verovatnoća opsluživanja se izračunava na sledeći način:

$$P_{ops} = \sum_{i=0}^{c+m-1} p_i = 1 - p_{c+m} = 1 - \rho^m \cdot p_c \, ; \qquad (98)$$

Srednji broj zauzetih kanala (c_z)

Srednji broj zauzetih kanala predstavlja očekivani broj kanala za opsluživanje koji rade. Srednji broj zauzetih kanala se izračunava na sledeći način:

$$c_z = \sum_{k=0}^{c} k \cdot p_k + c \cdot \sum_{r=1}^{m} p_{c+m} = p_0 \cdot \sum_{k=0}^{c} k \cdot \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + c \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^m}{1-\rho} \cdot p_c \, ; \qquad (99)$$

Verovatnoća postojanja reda (P_{pr})

Verovatnoća postojanja reda predstavlja verovatnoću da ima jedinica u redu koje čekaju na opsluživanje. To su stanja sistema kada ima *c+1* ili više jedinica u sistemu tj. c+1, c+2, ..., c+m. Verovatnoća postojanja reda se izračunava na sledeći način:

$$P_{pr} = p_{c+1} + p_{c+2} + ... + p_{c+m} = 1 - p_0 - p_1 -, ..., - p_c \text{, tj.:}$$

$$P_{pr} = \sum_{r=1}^{m} p_{c+r} = p_c \cdot \sum_{r=1}^{m} \rho^r = p_c \cdot \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho} \, ; \qquad (100)$$

Srednji broj jedinica u redu (N_w)

Srednji broj jedinica u redu predstavlja očekivanu veličinu reda. Da bi se odredio srednji broj jedinica u redu potrebno je definisati slučajnu promenljivu "broj jedinica u redu" (X_w) i njenu raspodelu verovatnoća. Raspodela verovatnoća slučajne promenljive X_w je:

$$X_w : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & m \\ p_0^r & p_1^r & p_2^r & \ldots & p_m^r \\ \sum_{k=0}^{c} p_k & p_{c+1} & p_{c+2} & \ldots & p_{c+m} \end{pmatrix} \tag{101}$$

gde je:

p_i (i=0,1, ...,c+m) – verovatnoće stanja sistema,

p_i^r (i=0,1, ...,m) – verovatnoće da ima 0,1,2, ...,m jedinica u redu, i

0,1,2, ...,m – realizacije slučajne promenljive X_w.

Srednji broj jedinica u redu izračunava se kao matematičko očekivanje slučajne promenljive X_w.

$$N_w = \sum_{i=0}^{m} i \cdot p_i^r = 0 \cdot \sum_{k=0}^{c} p_k + 1 \cdot p_{c+1} + 2 \cdot p_{c+2} + \ldots + m \cdot p_{c+m}, \text{ i.e.}$$

$$N_w = \sum_{r=1}^{m} r \cdot p_{c+r} = p_c \cdot \sum_{r=1}^{m} r \cdot \rho^r = p_c \cdot \rho \cdot (1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 +,\ldots,+ m \cdot \rho^{m-1});$$ [6]

$$N_w = \rho \cdot p_c \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1-\rho) + 1]}{(1-\rho)^2}. \tag{102}$$

Srednji broj jedinica u sistemu (N_{ws})

Srednji broj jedinica u sistemu predstavlja očekivani broj jedinica u sistemu, i može se odrediti kao matematičko očekivanje slučajne promenljive čija je raspodela verovatnoća definisana izrazom (97) tj. opštim zakonom raspodele verovatnoća stanja višekanalnog sistema opsluživanja:

$$N_{ws} = \sum_{i=0}^{c+m} i \cdot p_i = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + \ldots + (c+m) \cdot p_{c+m}, \tag{103}$$

Srednji broj jedinica u sistemu takođe se može dobiti kao:

$$N_{ws} = c_z + N_w.$$

---

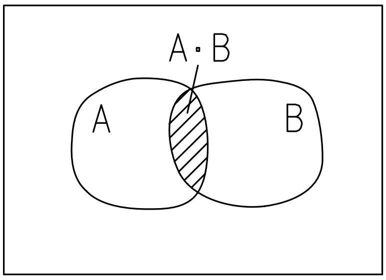
[6] Zbir prvih m članova geometrijskog reda: $1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho}$,

prvi izvod gornjeg izraza: $1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 + \ldots + m \cdot \rho^{m-1} = \frac{1-\rho^m \cdot [m \cdot (1-\rho) + 1]}{(1-\rho)^2}$.

Raspodela vremena koje jedinica provede u redu

Da bi se odredio zakon raspodele vremena koje jedinica provede u redu potrebno je prvo odrediti verovatnoću da je vreme koje jedinica provede u redu (T_r) manje od nekog zadatog (t). U tu svrhu potrebno je definisati dva događaja: (slika IV-30)

– događaj A: u redu ima *k* jedinica ($X=c+k$, $0 \le k \le m-1$) i
– događaj B: vreme koje jedinica provede u redu je manje od zadatog ($T_r<t$).



Slika IV-30. Presek događaja A i B.

Presek događaja A i B predstavlja verovatnoću da će jedinica koja pristupa u sistem u redu boraviti manje od zadatog vremena. Verovatnoća tog složenog događaja se može napisati kao:

$$P_k(T_r<t)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A) \tag{104}$$

gde je:
P(A) – verovatnoća događaja A, tj. da u redu ima *k* jedinica,
P(B/A) – verovatnoća događaja B pod uslovom da se ostvario događaj A, tj. da je data jedinica boravila u redu manje vreme od zadatog ako je u trenutku njenog dolaska u sistem u redu bilo *k* jedinica.

Iz napred iznetog sledi:

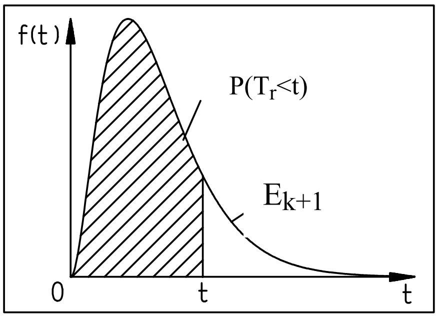
$$P(T_r < t) = \sum_{k=0}^{m-1} p_{c+k} \cdot P(T_r < t / X = x_{c+k}) \tag{105}$$

tj.:

$$P(T_r < t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \rho^k \cdot p_0 \cdot \int_0^t \frac{c \cdot \mu \cdot (c \cdot \mu \cdot t)^k \cdot e^{-c \cdot \mu \cdot t}}{k!} \cdot dt\,. \tag{106}$$

Izraz: $P(X = c + k) = p_{c+k} = \dfrac{(c \cdot \rho)^k}{c!} \rho^k \cdot p_0$, predstavlja verovatnoću da se u redu nalazi *k* jedinica u trenutku pristupanja posmatrane jedinice u sistem (u datom trenutku u redu može biti najviše *m-1* jedinica tj. mora postojati barem jedno mesto u redu prazno).

Izraz: $\int_0^t \frac{c\cdot\mu\cdot(c\cdot\mu\cdot t)^k\cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}}{k!}\cdot dt$, predstavlja verovatnoću da će jedinica koja pristupa u sistem čekati u redu opsluživanje jedne od *c* jedinica koje se trenutno opslužuju i opsluživanje *k* jedinica u redu ispred sebe, što znači da je vreme koje jedinica provodi u redu jednako zbiru *k+1* slučajnih promenljivih od kojih svaka ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $c\cdot\mu$. Takva slučajna promenljiva ima Erlangovu raspodelu reda *k+1* (slika IV-31.)



Slika IV-31. Raspodela vremena koje jedinica provede u redu.

Rešenje integrala u prethodnom izrazu je:

$$\int_0^t \frac{c\cdot\mu\cdot(c\cdot\mu\cdot t)^k\cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}}{k!}\cdot dt = 1-\sum_{i=0}^{k}\frac{(c\cdot\mu\cdot t)^i}{i!}\cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}$$

i izraz (106) može se napisati kao:

$$P(T_r < t) = \frac{(c\cdot\rho)^c}{c!}\cdot p_0\cdot\left[\sum_{k=0}^{m-1}\rho^k - e^{-c\cdot\mu\cdot t}\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{(\lambda\cdot t)^i}{i!}\cdot\rho^{k-i}\right]; \qquad (107)$$

Sume u prethodnom izrazu mogu se napisati kao:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\rho^k = \frac{1-\rho^m}{1-\rho}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{(\lambda\cdot t)^i}{i!}\cdot\rho^{k-i} = \sum_{k=0}^{m}\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot\frac{1-\rho^{m-k}}{1-\rho}.$$

Zamenom prethodnih izraza u (107) i posle elementarnih transformacija konačan izraz za verovatnoću da jedinica koja uđe u sistem će ostati u redu manje od zadatog vremena (t) tj. raspodela vremena koje jedinica provede u redu, za višekanalni sistem opsluživanja sa ograničenim redom, je data sledećim izrazom:

$$P(T_r < t) = \frac{(c\cdot\rho)^c}{c!}\cdot\frac{p_0}{1-\rho}\cdot\left\{1-\rho^m - e^{-c\cdot\mu\cdot t}\cdot\left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!} - \rho^m\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(c\cdot\mu\cdot t)^k}{k!}\right]\right\} \qquad (108)$$

dok je gustina raspodele slučajne promenljive: vreme koje jedinica provede u redu, određena izrazom (109):

$$f(t) = \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot p_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot (c \cdot \mu - \lambda) \cdot e^{-\mu \cdot t} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}; \qquad (109)$$

Potpun događaj u ovom slučaju je oblika:

$$P(T_r<t) + P(T_r \geq t) + P(T_r=0) = 1;$$

gde je: $P(T_r = 0) = \sum_{k=0}^{c-1} p_k$.

Srednje vreme koje jedinica provede u redu (t_w)

Srednje vreme koje jedinica provede u redu predstavlja očekivano vreme koje jedinica provede u redu i može se dobiti direktno primenom *Little*–ove formule tj. kada se srednji broj jedinica u redu (N_w) podeli sa prosečnim intenzitetom dolaska jedinica u sistem ($\overline{\lambda}$):

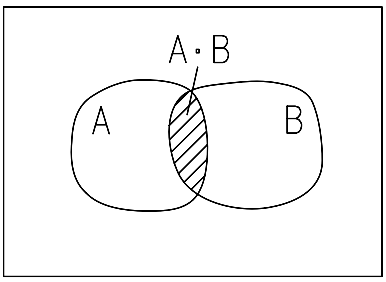
$$t_w = \frac{N_w}{\overline{\lambda}}.$$

U slučaju višekanalnog sistema opslužuvanja sa ograničenim redom prosečni intenzitet dolaznog toka se izračunava kao:

$$\overline{\lambda} = \sum_{k=0}^{c+m} \lambda_k \cdot p_k = \lambda \cdot (p_0 + p_1 + ... + p_{c+m-1}) + 0 \cdot p_{c+m} = \lambda \cdot (1 - p_{c+m}).$$

Zakon raspodele vremena koje jedinica provede u sistemu

Da bi se odredio zakon raspodele vremena koje jedinica provede u sistemu potrebno je prvo odrediti verovatnoću da je vreme koje jedinica provede u sistemu (T_s) manje od nekog zadatog (t). U tu svrhu potrebno je definisati dva događaja: (slika IV-32.)



Slika IV-32. Presek događaja A i B.

– događaj A: u sistemu ima k jedinica ($X=k$, $0 \le k \le c+m$) i
– događaj B: vreme koje jedinica provede u sistemu je manje od zadatog ($T_S<t$).

Presek događaja A i B predstavlja verovatnoću da će jedinica koja pristupa u sistem u njemu boraviti manje od zadatog vremena. Verovatnoća tog složenog događaja se može napisati kao:

$$P_k(T_S<t)=P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B/A) \tag{110}$$

gde je:
P(A) – verovatnoća događaja A, tj. da u sistemu ima *k* jedinica,
P(B/A) – verovatnoća događaja B pod uslovom da se ostvario događaj A, tj. da je data jedinica boravila u sistemu manje vreme od zadatog ako je u trenutku njenog dolaska u sistem u njemu bilo *k* jedinica.

Iz napred iznetog sledi:

$$P(T_s < t) = \sum_{k=0}^{c+m} P(X = k) \cdot P(T_s < t / X = k), \tag{111}$$

tj.:

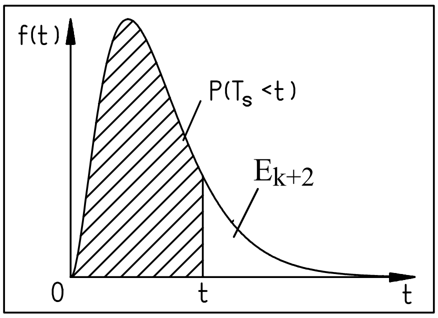
$$\begin{aligned} P(T_s < t) = {} & \sum_{k=0}^{c-1} p_k \cdot \int_0^t (k+1) \cdot \mu \cdot e^{-(k+1)\cdot\mu\cdot t} \cdot dt + \\ & + \sum_{k=0}^{m-1} p_{c+k} \cdot \int_0^t \frac{c \cdot \mu \cdot (c \cdot \mu \cdot t)^{k+1} \cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}}{(k+1)!} \cdot dt \end{aligned} \tag{112}$$

gde su: p_k ($k=0,1,2, ..., c+m$) verovatnoće stanja višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom definisane izrazom (97).

Izraz: $\int_0^t (k+1) \cdot \mu \cdot e^{-(k+1)\cdot\mu\cdot t} \cdot dt$, predstavlja verovatnoću da jedinica koja uđe u sistem, ako je u njemu *k* jedinica (*k<c*), u sistemu ostati manje od zadatog vremena (t), ako je intenzitet opsluživanja sistema $(k+1)\cdot\mu$.

Izraz: $\int_0^t \frac{c \cdot \mu \cdot (c \cdot \mu \cdot t)^{k+1} \cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}}{(k+1)!} \cdot dt$, predstavlja verovatnoću da jedinica koja uđe u sistem, ako je u redu *k* jedinica (*k<m-1*), će čekati: završetak opsluživanja jedne od *c* jedinica koje se trenutno opslužuju i opsluživanje *k* jedinica koje su ispred nje u redu. Nakon toga jedinica će ostati još u sistemu i vreme potrebno za njeno opsluživanje. To znači da je vreme koje jedinica provede u sistemu jednako sumi

k+2 eksponencijalno raspodeljene slučajne promenljive sa parametrom $c\cdot\mu$ – intenzitet opsluživanja. Takva slučajna promenljiva, vreme koje jedinica provede u sistemu, ima Erlangovu raspodelu reda *k+2*. (slika IV-33.)



Slika IV-33. Raspodela vremena koje jedinica provede u sistemu.

Rešenja integrala u prethodnom izrazu su:

$$\int_0^t (k+1)\cdot\mu\cdot e^{-(k+1)\cdot\mu\cdot t}\cdot dt = 1 - e^{-(k+1)\cdot\mu\cdot t}$$

$$\int_0^t \frac{c\cdot\mu\cdot(c\cdot\mu\cdot t)^{k+1}\cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}}{(k+1)!}\cdot dt = 1 - \sum_{i=0}^{k+1}\frac{(c\cdot\mu\cdot t)^i}{i!}\cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}$$

i izraz (112) može da napiše u sledećem obliku:

$$P(T_s < t) = \sum_{k=0}^{c-1} p_k + \sum_{k=0}^{m-1} p_{c+k} - \sum_{k=0}^{c-1} p_k \cdot e^{-(k+1)\cdot\mu\cdot t} - \sum_{k=0}^{m-1} p_{c+k}\cdot\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(c\cdot\mu\cdot t)^i}{i!}\cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}$$

i.e.

$$P(T_s < t) = P_{ops} - \sum_{k=0}^{c-1} p_k \cdot e^{-(k+1)\cdot\mu\cdot t} - \sum_{k=0}^{m-1} p_{c+k}\cdot\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(c\cdot\mu\cdot t)^i}{i!}\cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t} \qquad (113)$$

gde:

$\sum_{k=0}^{c-1} p_k + \sum_{k=0}^{m-1} p_{c+k}$ predstavlja verovatnoću opsluživanja P_{ops}.

Posle elementarnih transformacija izraz (113) se može napisati kao:

$$P(T_s < t) = P_{ops} - p_0 \cdot \left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\cdot\rho)^k}{k!}\cdot e^{-(k+1)\cdot\mu\cdot t} + \frac{(c\cdot\rho)^c\cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}}{\rho\cdot c!}\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(\lambda\cdot t)^i}{i!}\cdot\rho^{(k+1)-i}\right] \qquad (114)$$

Dvostruka suma u izrazu (114) kože se napisati u sledećem obliku:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(\lambda\cdot t)^i}{i!}\cdot\rho^{(k+1)-i}=\sum_{k=0}^{m}\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot\frac{1-\rho^{(m+1)-k}}{1-\rho}-1. \qquad (115)$$

Zamenom izraza (115) u izraz (114), i nakon elementarnih transformacija, konačan izraz za verovatnoću da će jedinica koja uđe u sistem u njemu ostati manje od zadatog vremena (t) tj. funkcija raspodele vremena koje jedinica provede u sistemu, za višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom, je oblika:

$$\begin{aligned}P(T_s<t)=P_{ops}-p_0\cdot\Bigg\{&\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\cdot\rho)^k}{k!}\cdot e^{-(k+1)\cdot\mu\cdot t}+\\&+\frac{(c\cdot\rho)^c\cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}}{\rho\cdot c!}\cdot\left[-1+\frac{1}{1-\rho}\cdot\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}-\rho^{m+1}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{(c\cdot\mu\cdot t)^k}{k!}\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \qquad (116)$$

Odavde sledi da je verovatnoća da jedinica provede u sistemu neko zadato vreme (t) manja od verovatnoće opsluživanja (P_{ops}), jer verovatnoća opsluživanja podrazumeva da će data jedinica biti opslužena ukoliko je prihvaćena u sistem nezavisno od vremena koje će ona provesti u sistemu.

Gustina raspodele slučajne promenljive: vreme koje jedinica provede u sistemu, u slučaju višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom, je oblika:

$$\begin{aligned}f(t)=\mu\cdot p_0\cdot\Bigg\{&\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\cdot\rho)^k}{k!}\cdot(k+1)\cdot e^{-(k+1)\cdot\mu\cdot t}+\\&+\frac{(c\cdot\rho)^{c-1}}{(c-1)!}\cdot c\cdot e^{-c\cdot\mu\cdot t}\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(\lambda\cdot t)^{k+1}}{(k+1)!}\Bigg\}\end{aligned} \qquad (117)$$

Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu (t_{ws})

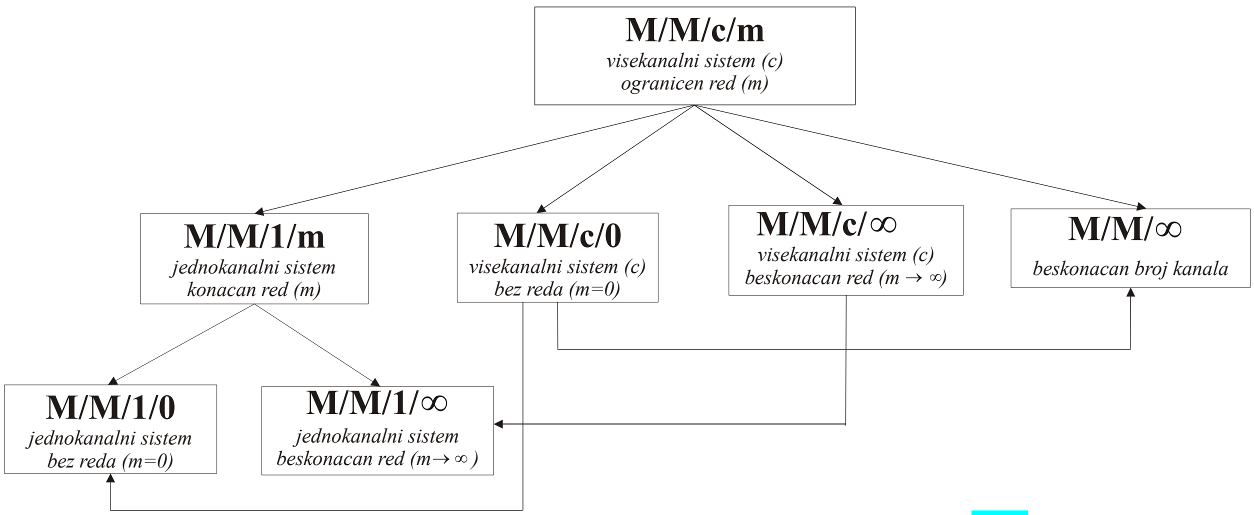
Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu predstavlja očekivano vreme koje jedinica provede u sistemu i može se dobiti direktno primenom *Little*–ove formule tj. kada se srednji broj jedinica u sistemu (N_{ws}) podeli sa prosečnim intenzitetom dolaska jedinica u sistem ($\overline{\lambda}$):

$$t_{ws}=\frac{N_{ws}}{\overline{\lambda}}.$$

U slučaju višekanalnog sistema opslužuvanja sa ograničenim redom prosečni intenzitet dolaznog toka se izračunava kao:

$$\overline{\lambda}=\sum_{k=0}^{c+m}\lambda_k\cdot p_k=\lambda\cdot(p_0+p_1+...+p_{c+m-1})+0\cdot p_{c+m}=\lambda\cdot(1-p_{c+m}).$$

Slika IV-34. prikazuje veze između prikazanih modela teorije redova. Prikazana je osnovna ideja koja se sastoji u tome da se izrazi za verovatnoće stanja sistema i osnovne karakteristike svih modela mogu dobiti jednostavnom zamenom odgovarajućih vrednosti za broj kanala za opsluživanje (c = 1,2,...,∞) i broj mesta u redu (m = 0,1,2,...,∞) u odgovarajuće izraze za višekanalni sistem opsluživanja sa ograničenim redom.



Slika IV-34. Veze između modela teorije redova. *41

PITANJA:

1. Osnovni proces opsluživanja.
2. Koja je osnovna karakteristika dolaznog toka klijenata – izvora i kakav izvor može da bude.
3. Raspodela broja generisanih klijenata u sistemu opsluživanja do nekog određenog vremenskog trenutka.
4. Raspodela vremena između dva uzastopna dolaska klijenata u sistem opsluživanja.
5. Šta predstavlja red u sistemu opsluživanja i kakav može da bude.
6. Koje vrste disciplina u redu postoje.
7. Mehanizam opsluživanja.
8. Elementarni sistem opsluživanja (skica).
9. Kendall-ovo označavanje sistema opsluživanja.
10. Koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje.
11. Razlika između stacionarnog i nestacionarnog režima rada sistema opsluživanja.
12. Šta predstavlja slučajni proces.
13. Klasifikacija slučajnih procesa.
14. Prostor stanja slučajnog procesa.
15. Parametar slučajnog procesa.
16. Definicija slučajnog procesa Markov-a sa kontinualnim vremenom i diskretnim stanjima.
17. Osnovna karakteristika nehomogenih slučajnih procesa.
18. Verovatnoća prelaska i verovatnoća stanja kod nehomogenih slučajnih procesa.
19. Matrična diferencijalna jednačina za definisanje promene verovatnoće stanja u zavisnosti od vremena, kod nehomogenih slučajnih procesa.
20. Osnovna karakteristika homogenih slučajnih procesa.
21. Verovatnoća prelaska i verovatnoća stanja kod homogenih slučajnih procesa.
22. Matrična diferencijalna jednačina za definisanje promene verovatnoće stanja u zavisnosti od vremena, kod homogenih slučajnih procesa.
23. Kada je homogeni slučajni proces Markov-a "nesvodljiv".
24. Kada je homogeni slučajni proces Markov-a *ergodičan*.
25. Uslov za prelazak sistema iz nestacionarnog u stacionarni režim rada.
26. Određivanje verovatnoća stanja sistema u stacionarnom režimu rada.
27. Šta predstavlja proces rađanja i umiranja.
28. Verovatnoće prelaska, procesa rađanja i umiranja, ako je sistem u stanju *k*.
29. Dijagram promene stanja procesa tipa "rađanja i umiranja".
30. Karakteristike jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.
31. Karakteristična stanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.
32. Dijagram promene stanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.

33. Izraz za verovatnoće promene stanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.
34. Nabrojati osnovne karakteristika jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.
35. Relacije između jednokanalnih sistema.
36. Karakteristike višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.
37. Karakteristična stanja višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.
38. Dijagram promene stanja višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.
39. Izraz za verovatnoće promene stanja višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.
40. Nabrojati osnovne karakteristika višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.
41. Veze između modela teorije redova.

42. Jednokanalni sistem opsluživanja sa ograničenim redom.
43. Izračunavanje osnovnih karakteristika jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.
44. Jednokanalni sistem opsluživanja bez reda.
45. Izračunavanje osnovnih karakteristika jednokanalnog sistema opsluživanja bez reda.
46. Jednokanalni sistem opsluživanja sa neograničenim redom.
47. Izračunavanje osnovnih karakteristika jednokanalnog sistema opsluživanja sa neograničenim redom.
48. Višekanalni sistem opsluživanja sa ograničenim redom.
49. Izračunavanje osnovnih karakteristika višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom.